2019 年東北大学文系問題 *3*

数列 $\{a_n\}$ を $a_1 = 1,\ \ a_2 = 3,\ \ a_{n+2} = \dfrac{2(a_{n+1})^2}{a_n}\ (n = 1, 2, 3, \cdots)$ で定めます。
一般項 a_n を求めてください。

解説・解答

$a_1=1,\ \ a_2=3,\ \ a_{n+2}=\dfrac{2(a_{n+1})^2}{a_n}$ $(n=1,2,3,\cdots)$ より任意の n で $a_n>0$ です。

漸化式の両辺を a_{n+1} で割れば $\dfrac{a_{n+2}}{a_{n+1}}=2\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ です。

数列 $\left\{\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right\}$ は初項 $\dfrac{a_2}{a_1}=3,$ 公比 2 の等比数列なので $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=3\cdot 2^{n-1}$ です。

底 2 の対数をとれば $\log_2 a_{n+1}-\log_2 a_n=\log_2 3+(n-1)$ です。

$n\geqq 2$ のとき

$$\begin{aligned}\log_2 a_n&=\log_2 a_1+\sum_{k=1}^{n-1}\left\{\log_2 a_{k+1}-\log_2 a_k\right\}\\&=\log_2 1+\sum_{k=1}^{n-1}\left\{\log_2 3+(k-1)\right\}\\&=(n-1)\log_2 3+\frac{(n-1)(n-2)}{2}\end{aligned}$$

この式は $n=1$ でも成り立っています

以上より $a_n=3^{n-1}\cdot 2^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}}$ です。