2019 年静岡大学理学部問題 4

0 から 9 までの整数が書かれた 10 枚のカードから、
無作為に 3 枚を取り出して書かれた整数を a, b, c とします。
$100a + 10b + c$ が 7 の倍数である確率を求めてください。

解説・解答

a, b, c は 0 以上 9 以下の互いに異なる整数です。
a, b, c の選び方は ${}_{10}P_3 = 720$ 通りです。

$a = b$、$100a + 10a + c$ が 7 の倍数であるとき
$100a + 10a + c = 7 \cdot 16a - (2a - c)$ なので $2a - c$ は 7 の倍数です。
$2a - c = -7$ なのが $(a, c) = (0, 7), (1, 9)$ の 2 通り
$2a - c = 0$ なのが $(a, c) = (1, 2), (2, 4), (3, 6), (4, 8)$ の 4 通り
$2a - c = 7$ なのが $(a, c) = (4, 1), (5, 3), (6, 5), (8, 9)$ の 4 通り
$2a - c = 14$ なのが $(a, c) = (7, 0), (8, 2), (9, 4)$ の 3 通り
ゆえに $2 + 4 + 4 + 3 = 13$ 通です。

$b = c$、$100a + 10b + b$ が 7 の倍数であるとき
$100a + 10b + b = 7(14a + b) + 2(a + 2b)$ なので $a + 2b$ は 7 の倍数です。
$a + 2b = 7$ なのが $(a, b) = (1, 3), (3, 2), (5, 1), (7, 0)$ の 4 通り
$a + 2b = 14$ なのが $(a, b) = (0, 7), (2, 6), (4, 5), (6, 4), (8, 3)$ の 5 通り
$a + 2b = 21$ なのが $(a, b) = (3, 9), (5, 8), (9, 6)$ の 3 通り
ゆえに $4 + 5 + 3 = 12$ 通です。

$c = a$、$100c + 10b + c$ が 7 の倍数であるとき
$100c + 10b + c = 7(b + 14c) + 3(b + c)$ なので $b + c$ は 7 の倍数です。
$b + c = 7$ なのが $(b, c) = (0, 7), (1, 6), (2, 5), (3, 4), (4, 3), (5, 2), (6, 1), (7, 0)$ の 8 通り
$b + c = 14$ なのが $(b, c) = (5, 9), (6, 8), (8, 6), (9, 5)$ の 4 通り
ゆえに $8 + 4 = 12$ 通です。

$a = b = c$、$100a + 10a + a$ が 7 の倍数であるとき
$100a + 10a + a = 7 \cdot 16a - a$ なので a は 7 の倍数です。
ゆえに $a = 0, 7$ の 2 通りです。

0 以上 999 以下で 7 の倍数は $0,\ 7,\ 14,\ 21,\ \cdots,\ 994 = 7 \cdot 142$ の 143 通りです。
$100a + 10b + c$ が 7 の倍数なのは $143 - (13 + 12 + 12 + 2) = 104$ 通りです。

以上より、$100a + 10b + c$ が 7 の倍数である確率は $\dfrac{104}{720} = \dfrac{13}{90}$ です。