*2019*年新潟大学理系問題 *5*

定積分 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin\theta + \cos\theta}{1 - \sin\theta\cos\theta}\, d\theta$ を計算してください。

解説・解答

$\sin\theta - \cos\theta = x$ と置換します。　$(\sin\theta + \cos\theta)d\theta = dx$

$x^2 = (\sin\theta - \cos\theta)^2 = 1 - 2\sin\theta\cos\theta$ なので $\sin\theta\cos\theta = \dfrac{1-x^2}{2}$ です。

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin\theta + \cos\theta}{1 - \sin\theta\cos\theta}\,d\theta = \int_{-1}^{1} \frac{1}{1 - \frac{1-x^2}{2}}\,dx = 4\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx$$

$x = \tan t$ と置換します。　$dx = \dfrac{1}{\cos^2 t}\,dt$

$$4\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx = 4\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1+\tan^2 t} \cdot \frac{1}{\cos^2 t}\,dt = 4\int_0^{\frac{\pi}{4}} dt = \pi$$

以上より $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin\theta + \cos\theta}{1 - \sin\theta\cos\theta}\,d\theta = \pi$ です。