2019 年新潟大学文系問題 *4*

n を 2 以上の整数として $P(x) = x^{2n} - nx^{n+1} + nx^{n-1} - 1$ とします。
$P(x)$ は $(x-1)^3$ で割り切れ $(x-1)^4$ では割り切れないことを示してください。

解説・解答

$t = x - 1$ と置き、$a_0, a_1, a_3, \cdots, a_{2n}$ を整数として次のように書けます。

$$
\begin{aligned}
P(x) &= P(t+1) \\
&= (t+1)^{2n} - n(t+1)^{n+1} + n(t+1)^{n-1} - 1 \\
&= a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \cdots + a_{2n} t^{2n}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
a_0 &= {}_{2n}C_0 - n \cdot {}_{n+1}C_0 + n \cdot {}_{n-1}C_0 - 1 \\
&= 1 - n + n - 1 = 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
a_1 &= {}_{2n}C_1 - n \cdot {}_{n+1}C_1 + n \cdot {}_{n-1}C_1 \\
&= 2n - n(n+1) + n(n-1) = 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
a_2 &= {}_{2n}C_2 - n \cdot {}_{n+1}C_2 + n \cdot {}_{n-1}C_2 \\
&= \frac{2n(2n-1)}{2} - n \cdot \frac{(n+1)n}{2} + n \cdot \frac{(n-1)(n-2)}{2} = 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
a_3 &= {}_{2n}C_3 - n \cdot {}_{n+1}C_3 + n \cdot {}_{n-1}C_3 \\
&= \frac{2n(2n-1)(2n-2)}{6} - n \cdot \frac{(n+1)n(n-1)}{6} + n \cdot \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{6} \\
&= \frac{(n-1)n(n+1)}{3} \neq 0
\end{aligned}
$$

以上より、

$P(x) = (x-1)^3\{a_3 + a_4(x-1) + a_5(x-1)^2 + \cdots + a_{2n}(x-1)^{2n-3}\}$ なので、

$P(x)$ は $(x-1)^3$ で割り切れ $(x-1)^4$ では割り切れません。