2019 年京都大学理系問題 *2*

$f(x) = x^3 + 2x^2 + 2$ とします。
$|f(n)|$ と $|f(n+1)|$ がともに素数となる整数 n を求めてください。

解説・解答

k を整数として $|f(2k)| = |(2k)^3 + 2(2k)^2 + 2| = 2|4k^2(k+1)+1|$ です。
$|f(2k)|$ が素数となるのは $|4k^2(k+1)+1| = 1$ のときなので $k = -1, 0$ です。
よって x が偶数で $|f(x)|$ が素数になるのは $|f(-2)|, |f(0)|$ だけです。

$|f(-3)| = |(-3)^3 + 2(-3)^2 + 2| = 7$ は素数です。
$|f(-1)| = |(-1)^3 + 2(-1)^2 + 2| = 3$ は素数です。
$|f(1)| = |(1)^3 + 2(1)^2 + 2| = 5$ は素数です。

以上より、
$|f(n)|$ と $|f(n+1)|$ がともに素数となるのは $n = -3, -2, -1, 0$ のときです。