2019 年神戸大学後期理系問題 *1*

$\alpha\,,\,\beta$ は $0 < \alpha < \beta < \dfrac{\pi}{2}$ を満たす実数です。

$\tan(\alpha+\beta)$ が整数となる整数の組 $(\tan\alpha\,,\,\tan\beta)$ を求めてください。

解説・解答

$0<\alpha<\beta<\dfrac{\pi}{2}$ なので $0<\tan\alpha<\tan\beta$ です。

$\tan\alpha, \tan\beta$ は整数なので $\tan\alpha \geqq 1$, $\tan\beta \geqq 2$ です。

$\tan\alpha \geqq 1=\tan\dfrac{\pi}{4}$ なので $\dfrac{\pi}{4} \leqq \alpha<\dfrac{\pi}{2}$ です。

$\tan\beta \geqq 2>\sqrt{3}=\tan\dfrac{\pi}{3}$ なので $\dfrac{\pi}{3}<\beta<\dfrac{\pi}{2}$ です。

$\dfrac{\pi}{2}<\dfrac{7\pi}{12}=\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi}{3}<\alpha+\beta<\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{\pi}{2}=\pi$ なので

$0>\tan(\alpha+\beta)>\tan\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi}{3}\right)=\dfrac{\tan\frac{\pi}{4}+\tan\frac{\pi}{3}}{1-\tan\frac{\pi}{4}\tan\frac{\pi}{3}}=\dfrac{1+\sqrt{3}}{1-1\cdot\sqrt{3}}=-2-\sqrt{3}>-4$

$\tan(\alpha+\beta)$ は整数なので $\tan(\alpha+\beta)=-1,-2,-3$ です。

$\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=-1$ のとき

$(\tan\alpha-1)(\tan\beta-1)=2$ なので $(\tan\alpha, \tan\beta)=(2,3)$ です。

$\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=-2$ のとき

$(2\tan\alpha-1)(2\tan\beta-1)=5$ なので $(\tan\alpha, \tan\beta)=(1,3)$ です。

$\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=-3$ のとき

$(3\tan\alpha-1)(3\tan\beta-1)=10$ なので $(\tan\alpha, \tan\beta)=(1,2)$ です。

以上より $(\tan\alpha, \tan\beta)=(1,2),(1,3),(2,3)$ です。