*2019*年慶應義塾大学理工学部問題 *1*

$\vec{a} = (1, 1)$, $\vec{p} = (\cos\theta, \sin\theta)$ とします。
θ が実数全体を動くとき $\displaystyle\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{4}} \frac{(x\vec{a} - \vec{p}) \cdot \vec{a}}{|x\vec{a} - \vec{p}|^2} dx$ の最大値を求めてください。

解説・解答

$f(x)=|x\vec{a}-\vec{p}|^2=(x-\cos\theta)^2+(x-\sin\theta)^2=2x^2-2\sqrt{2}\,x\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{4}\right)+1$ と置きます。
$f'(x)=2(x-\cos\theta)+2(x-\sin\theta)$ なので
$(x\vec{a}-\vec{p})\cdot\vec{a}=(x-\cos\theta)+(x-\sin\theta)=\dfrac{f'(x)}{2}$ です。

$$\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{4}}\frac{(x\vec{a}-\vec{p})\cdot\vec{a}}{|x\vec{a}-\vec{p}|^2}dx=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{4}}\frac{f'(x)}{f(x)}dx=\frac{1}{2}\Big[\log f(x)\Big]_0^{\frac{\sqrt{2}}{4}}=\frac{1}{2}\log\left\{\frac{5}{4}-\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)\right\}$$

以上より $\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{4}\right)=-1$ のときに最大値 $\dfrac{1}{2}\log\dfrac{9}{4}=\log\dfrac{3}{2}$ です。