2019 年慶應義塾大学環境情報学部問題 *1*

任意の実数 θ_1, θ_2 に対して $x = \cos\theta_1 + \cos\theta_2$ ， $y = \cos 2\theta_1 + \cos 2\theta_2$ とします。
xy 平面で点 (x, y) の存在しうる領域の面積を求めてください。

解説・解答

$-1 \leqq \cos\theta_1 \leqq 1$,　$-1 \leqq \cos\theta_2 \leqq 1$
$x = \cos\theta_1 + \cos\theta_2$
$y = \cos 2\theta_1 + \cos 2\theta_2$
$\ = (2\cos^2\theta_1 - 1) + (2\cos^2\theta_2 - 1)$
$\ = 2(\cos\theta_1 + \cos\theta_2)^2 - 4\cos\theta_1\cos\theta_2 - 2$
$\ = 2x^2 - 2 - 4\cos\theta_1\cos\theta_2$
よって $\cos\theta_1\cos\theta_2 = \dfrac{2x^2 - y - 2}{4}$ です。

$\cos\theta_1$, $\cos\theta_2$ を解に持つ二次方程式を考えます。
$\cos\theta_1 + \cos\theta_2 = x$,　$\cos\theta_1\cos\theta_2 = \dfrac{2x^2 - y - 2}{4}$ なので、解と係数の関係を使い、

$f(t) = t^2 - xt + \dfrac{2x^2 - y - 2}{4} = \left(t - \dfrac{x}{2}\right)^2 + \dfrac{x^2 - y - 2}{4}$ と置き、

二次方程式 $f(t) = 0$ が範囲 $-1 \leqq t \leqq 1$ に 2 つの解を持てば良いので
$-1 \leqq \dfrac{x}{2} \leqq 1$,　$\dfrac{x^2 - y - 2}{4} \leqq 0$,
$f(-1) = \dfrac{2x^2 + 4x - y + 2}{4} \geqq 0$,　$f(1) = \dfrac{2x^2 - 4x - y + 2}{4} \geqq 0$ です。

整理すると $-2 \leqq x \leqq 0$ では $x^2 - 2 \leqq y \leqq 2x^2 + 4x + 2$
　　　　　$0 \leqq x \leqq 2$ では $x^2 - 2 \leqq y \leqq 2x^2 - 4x + 2$ です。

この領域は y 軸対称なので面積は $2\displaystyle\int_0^2 \{(2x^2 - 4x + 2) - (x^2 - 2)\}dx = \dfrac{16}{3}$ です。