

2019年一橋大学問題 1

次のように定めた数列 $\{a_n\}$ を考えます。

$$a_1 = 1, \quad a_2 = p^2, \quad a_{n+2} = a_{n+1} - a_n + 13 \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

どのような自然数 p に対しても平方数でない項が存在することを示してください。

解説・解答

$$a_1 = 1, \quad a_2 = p^2, \quad a_{n+2} = a_{n+1} - a_n + 13 \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

$$a_3 = a_2 - a_1 + 13 = p^2 - 1 + 13 = p^2 + 12$$

$$a_4 = a_3 - a_2 + 13 = (p^2 + 12) - p^2 + 13 = 25$$

$$a_5 = a_4 - a_3 + 13 = 25 - (p^2 + 12) + 13 = 26 - p^2$$

$$a_6 = a_5 - a_4 + 13 = (26 - p^2) - 25 + 13 = 14 - p^2$$

$p = 1$ のとき $a_6 = 14 - 1^2 = 13$ は平方数ではありません。

$p = 2$ のとき $a_6 = 14 - 2^2 = 10$ は平方数ではありません。

$p = 3$ のとき $a_6 = 14 - 3^2 = 5$ は平方数ではありません。

$p \geq 4$ のとき $a_6 = 14 - p^2 \leq 14 - 4^2 = -2$ は平方数ではありません。

よって、どのような自然数 p に対しても a_6 は平方数ではありません。

以上より、どのような自然数 p に対しても平方数でない項が存在します。