2019 年旭川医科大学医学部問題 *2*

n を正の整数として $f(x) = \left(1 + \dfrac{x}{1!} + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^3}{3!} + \cdots + \dfrac{x^n}{n!}\right)e^{-x}$ と置きます。
正の実数 x に対し $-\dfrac{1}{e} \leqq f'(x) < 0$ が成り立つことを示してください。

解説・解答

$$f'(x)=\left(0+1+\frac{x}{1!}+\cdots+\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\right)e^{-x}-\left(1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}\right)e^{-x}=-\frac{x^n\,e^{-x}}{n!}$$

$x>0$ では $x^n\,e^{-x}>0$ なので $f'(x)<0$ です。

$f''(x)=-\dfrac{x^{n-1}\,e^{-x}}{(n-1)!}+\dfrac{x^n\,e^{-x}}{n!}=\dfrac{(x-n)x^{n-1}\,e^{-x}}{n!}$ なので $f'(x)$ は

$0<x<n$ で減少、極小値 $f'(n)=-\dfrac{n^n\,e^{-n}}{n!}$、$n<x$ で増加です。

よって $f'(x)\geqq -\dfrac{n^n\,e^{-n}}{n!}$ です。

$n=1$ のとき　$f'(x)=-\dfrac{1^1\,e^{-1}}{1!}=-\dfrac{1}{e}$ です。

$n\geqq 2$ のとき、$n<x<n+1$ で $\log x<\log(n+1)$ なので

$\displaystyle\int_n^{n+1}\log x\,dx<\int_n^{n+1}\log(n+1)\,dx=\log(n+1)$ です。

よって $\displaystyle\int_1^n\log x\,dx=\sum_{k=1}^{n-1}\int_k^{k+1}\log x\,dx<\sum_{k=1}^{n-1}\log(k+1)=\sum_{k=0}^{n-1}\log(k+1)=\log(n!)$ です。

$\displaystyle\int_1^n\log x\,dx=\Big[x\log x-x\Big]_1^n=n\log n-n+1=\log(n^n\,e^{-n+1})<\log(n!)$ です。

よって $n^ne^{-n+1}<n!$ なので $\dfrac{n^n\,e^{-n}}{n!}<\dfrac{1}{e}$ です。

ゆえに $f'(x)\geqq -\dfrac{n^n\,e^{-n}}{n!}>-\dfrac{1}{e}$ です。

以上より

正の実数 x で $-\dfrac{1}{e}\leqq f'(x)<0$ が成り立ちます。