累乗の和 微分による方法のまとめ

酒匂貴市

平成 27 年 11 月 22 日

目 次

1 累乗の和

定義 1.1 （累乗の和）非負整数 d, n に対して、累乗の和を次の記号で表す。

$$S^d(n) \equiv \sum_{k=0}^{n} k^d = 0 + 1^d + \cdots + n^d$$

◂

これから得られる、最も基本的な関係式は

$$S^d(n) - S^d(n-1) = n^d$$

である。

明らかに $d = 0$ に対して $S^0(n) = n$ である。まず、累乗の和が多項式で表せることを示す。

定理 1.1 $S^d(n)$ は $d+1$ 次の n の多項式で表せる。

(proof)
$d = 0$ のときは明らかである。$d \leq D-1$ のとき成立するとする。ここで、$K^d(n) \equiv n(n-1)\cdots(n-d+1)$ とおく。$K^d(n) = n^d + g^d(n), g^d(n)$ は次数 $d-1$ 以下の n の多項式、と表現できる。

$$\begin{aligned} K^{D+1}(n+1) - K^{D+1}(n) &= n(n-1)\cdots(n-D)\{(n+1)-(n-D+1)\} \\ &= D \cdot K^D(n) = D(n^D + g^D(n)) \end{aligned}$$

これを $n = 1, \cdots, N$ まで足すと

$$K^{D+1}(n+1) - K^{D+1}(1) = D\sum_{n=1}^{N} n^D + D\sum_{n=1}^{N} g^D(n)$$
$$K^{D+1}(n+1) - D - 1 - D\sum_{n=1}^{N} g^D(n) = D \cdot S^D(n)$$

である。$\sum_{n=1}^{N} g^D(n)$ は $D-1$ 次以下なので、仮定より D 次以下の多項式である。よって、左辺が $D+1$ 次多項式でり、右辺の $S^D(n)$ も $D+1$ 次多項式である。よって、$d = D$ の場合も示された。したがって、数学的帰納法より、定理が示される。 証明終

多項式の係数については、まず $S^d(0) = 0$ より定数項は 0 であることがわかる。ここで、次のように係数の記号を定義しておこう。

定義 1.2 （係数の記号）

$$S^d(n) = \sum_{j=0}^{d} a_j^{(d)} n^{j+1} = a_0^{(d)} n + \cdots + a_d^{(d)} n^{d+1}$$

と表示するものとする。◂

まず、$S^d(1) = 0 + 1^d = 1$ より、次の重要な関係が成立する。

定理 1.2

$$\sum_{j=0}^{d} a_j^{(d)} = 1$$

つまり、同じ次数の係数を合計すると 1 となる。

2 微分による累乗の和の公式のアルゴリズム的計算法

2.1 実数多項式への議論の拡大

$S^d(n)$ は非負整数 n についての多項式であり、恒等式

$$S^d(n) - S^d(n-1) = n^d$$

を満たすものである。ここで、非負整数は実数に含まれており、同じ係数をもってくることで、n を x に置換し、実数多項式として考えることもできる。$S^d(n) = \sum_{j=0}^{d} a_j^{(d)} n^{j+1}$ であれば、実数 x に対する多項式

$$S^d(x) = \sum_{j=0}^{d} a_j^{(d)} x^{j+1}$$

を考えることができるということである。

実数の多項式として考えた場合、恒等式だった次の関係は、$x = 0, 1, \cdots$ のときに成り立つ式ということになる。

$$S^d(x) = S^d(x-1) + x^d$$

しかし、両辺ともに $d+1$ 次多項式なので、$x = 0, 1, \cdots, d$ でこの関係が成り立つ時点で、多項式の係数がすべて一致するため、任意の実数においてこの関係式が成り立ち、実は実数の多項式としても恒等式なのである。

2.2 微分による係数の関係の導出

実数の多項式としても恒等式が成立しているため、両辺を微分した式も成立する。

$$(S^d)'(x) - (S^d)'(x-1) = dx^{d-1}$$

これを $x = 1, \cdots, n$ について合計すると

$$(S^d)'(n) - (S^d)'(0) = d\sum_{x=0}^{n} x^{d-1}$$
$$(S^d)'(n) - a_0^{(d)} = dS^{(d-1)}(n)$$

であり、$S^d(n)$ の係数と $S^{(d-1)}(n)$ の係数の間に関係式を見出すことができる。係数を使って表現すると

$$\sum_{j=1}^{d} a_j^{(d)}(j+1)n^j = \sum_{j=0}^{d-1} d\cdot a_j^{(d-1)}n^{j+1}$$
$$\sum_{j=1}^{d}\left(a_j^{(d)}(j+1)\right)n^j = \sum_{j=1}^{d}\left(d\cdot a_{j-1}^{(d-1)}\right)n^j$$

なので $j = 1, \cdots, d$ に対して

$$a_j^{(d)} = \frac{d}{j+1}\cdot a_{j-1}^{(d-1)}$$

である。つまり、次数 $d-1$ の累乗の公式から次数 d の累乗の公式の係数が、$a_0^{(d)}$ を除いて上の式から求められることになる。$a_0^{(d)}$ については

$$\sum_{j=0}^{d} a_j^{(d)} = 1$$

の関係式から求めればよい。計算アルゴリズムをまとめよう。

1. $S^{(d-1)}(n)$ の係数から $a_j^{(d)} = \frac{d}{j+1}\cdot a_{j-1}^{(d-1)}$ の関係式より $a_1^{(d)}, \cdots, a_d^{(d)}$ を求める。
2. すでに得られた $a_1^{(d)}, \cdots, a_d^{(d)}$ を合計し 1 から減じて $a_0^{(d)} = 1 - \left(a_1^{(d)} + \cdots + a_d^{(d)}\right)$ を得る。

これにより、累乗の公式を逐次求めていくことができる。

2.2.1 単純な場合の結果

自然数の和の公式をまず導出する。

$$a_1^{(1)} = \frac{1}{1+1}\cdot a_0^{(0)} = \frac{1}{2}\cdot 1 = \frac{1}{2}$$
$$a_0^{(1)} = 1 - a_1^{(1)} = \frac{1}{2}$$

となり、よく知られた

$$S^1(n) = \frac{1}{2}n + \frac{1}{2}n^2 = \frac{n(n+1)}{2}$$

である。

二乗の和については

$$
\begin{aligned}
a_2^{(2)} &= \frac{2}{2+1} \cdot a_1^{(1)} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{3} \\
a_1^{(2)} &= \frac{2}{1+1} \cdot a_0^{(1)} = \frac{1}{2} \\
a_0^{(2)} &= 1 - a_2^{(2)} - a_1^{(2)} = \frac{1}{6}
\end{aligned}
$$

となり、果たしてよく知られた

$$
S^1(n) = \frac{1}{6}n + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{3}n^3 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}
$$

である。

　また

$$
\begin{aligned}
a_d^{(d)} &= \frac{d}{d+1} \cdot a_{d-1}^{(d-1)} \\
a_{d-1}^{(d)} &= \frac{d}{d} \cdot a_{d-2}^{(d-1)} = a_{d-2}^{(d-1)} \\
a_{d-2}^{(d)} &= \frac{d}{d-1} \cdot a_{d-3}^{(d-1)}
\end{aligned}
$$

より、即座に

$$
\begin{aligned}
a_d^{(d)} &= \frac{1}{d+1} \\
a_{d-1}^{(d)} &= \frac{1}{2} \\
a_{d-2}^{(d)} &= \frac{d}{12}
\end{aligned}
$$

は成立する。

2.2.2　計算例

　計算アルゴリズムと、単純な結果

$$
\begin{aligned}
a_d^{(d)} &= \frac{1}{d+1} \\
a_{d-1}^{(d)} &= \frac{1}{2} \\
a_{d-2}^{(d)} &= \frac{d}{12}
\end{aligned}
$$

を用いて、計算した例を記す。

表 1: 計算例

$S^d(n)$	$a_0^{(d)}$	$a_1^{(d)}$	$a_2^{(d)}$	$a_3^{(d)}$	$a_4^{(d)}$	$a_5^{(d)}$
$S^0(n)$	1					
$S^1(n)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$				
$S^2(n)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$			
$S^3(n)$	$0\left(= 1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right)$	$\frac{1}{4}\left(= \frac{3}{12}\right)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$		
$S^4(n)$	$\frac{-1}{30}\left(= 1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{2} - \frac{1}{5}\right)$	0	$\frac{1}{3}\left(= \frac{4}{12}\right)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{5}$	
$S^5(n)$	$0\left(= 1 + \frac{1}{12} - \frac{5}{12} - \frac{1}{2} - \frac{1}{6}\right)$	$\frac{-1}{12}\left(= \frac{5}{1+1}\,\frac{-1}{30}\right)$	0	$\frac{5}{12}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$

3　ベルヌーイ数による表現

3.1　ベルヌーイ数による表現

定義 3.1　（ベルヌーイ数）

$$B_d \equiv a_0^{(d)}$$

をベルヌーイ数という。◂

　ベルヌーイ数を使うと、係数は

$$\begin{aligned} a_j^{(d)} &= \frac{d}{j+1} a_{j-1}^{(d-1)} \\ &= \frac{d}{j+1} \frac{d-1}{j} a_{j-2}^{(d-2)} \\ &= \frac{d}{j+1} \frac{d-1}{j} \cdots \frac{d-j+1}{2} a_0^{(d-j)} \\ &= \frac{d!}{(d-j)!} \frac{1}{(j+1)!} B_{d-j} \\ &= \frac{d!}{(d-j)!} \frac{1}{(j+1)!} B_{d-j} \\ &= \frac{{}_{d+1}C_{j+1}}{d+1} B_{(d+1)-(j+1)} \end{aligned}$$

と表せる。よって

$$\begin{aligned} S^d(n) &= \sum_{j=0}^{d} a_j^{(d)} n^{j+1} \\ &= \sum_{j=0}^{d} \frac{{}_{d+1}C_{j+1}}{d+1} B_{(d+1)-(j+1)} n^{j+1} \\ &= \frac{1}{d+1} \sum_{j=1}^{d+1} {}_{d+1}C_j B_{(d+1)-j} n^j \\ &= \frac{1}{d+1} \left(\sum_{j=0}^{d+1} {}_{d+1}C_j B_{(d+1)-j} n^j - B_{d+1} \right) \end{aligned}$$

である。線形写像 $T : Q[x] \to Q$ を

$$T\left(\sum_{j=0}^{m} c_j x^j \right) = \sum_{j=0}^{m} c_j B_j$$

によって定義すると、これは線形写像であり

$$\begin{aligned} S^d(n) &= \frac{1}{d+1} \left(\sum_{j=0}^{d+1} {}_{d+1}C_j B_{(d+1)-j} n^j - B_{d+1} \right) \\ &= \frac{1}{d+1} \left(\sum_{j=0}^{d+1} {}_{d+1}C_j T\left(x^{(d+1)-j} \right) n^j - T\left(x^{d+1} \right) \right) \\ &= \frac{1}{d+1} T\left(\sum_{j=0}^{d+1} {}_{d+1}C_j x^{(d+1)-j} n^j - x^{d+1} \right) \\ &= \frac{1}{d+1} T\left((x+n)^{d+1} - x^{d+1} \right) \end{aligned}$$

と表現できる。

3.2 母関数

まず、累乗の和の母関数を求める。

$$
\begin{aligned}
G_n(x) &\equiv \sum_{d=0}^{\infty} \frac{S^d(n)}{d!} x^d \\
&= \sum_{d=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{n} k^d \frac{1}{d!} x^d \\
&= \sum_{k=1}^{n} \sum_{d=0}^{\infty} \frac{(kx)^d}{d!} \\
&= \sum_{k=1}^{n} e^{kx} \\
&= \frac{1-e^{nx}}{1-e^x} e^x
\end{aligned}
$$

である。また、ベルヌーイ数の母関数を

$$
M(x) \equiv \sum_{d=0}^{\infty} \frac{B_d}{d!} x^d
$$

とおく。ベルヌーイ数表記を用いると

$$
\begin{aligned}
G_n(x) &= \sum_{d=0}^{\infty} \frac{S^d(n)}{d!} x^d \\
&= \sum_{d=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{d} \frac{{}_{d+1}C_{j+1}}{d+1} B_{(d+1)-(j+1)} n^{j+1} \frac{1}{d!} x^d \\
&= \sum_{d=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{d} \frac{1}{(j+1)!(d-j)!} B_{d-j} n^{j+1} x^d \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{d=j}^{\infty} \frac{1}{(j+1)!(d-j)!} B_{d-j} n^{j+1} x^d \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{(j+1)!s!} B_s n^{j+1} x^{s+j} \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{(j+1)!} n^{j+1} x^j \sum_{s=0}^{\infty} \frac{B_s}{s!} x^s \\
&= \left(\frac{1}{x} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{(j+1)!} (nx)^{j+1} \right) M(x) \\
&= \frac{e^{nx}-1}{x} M(x)
\end{aligned}
$$

も成立する。よって

$$
\begin{aligned}
M(x) &= \frac{1-e^{nx}}{1-e^x} e^x \frac{x}{e^{nx}-1} \\
&= \frac{1}{e^x-1} e^x x \\
&= \frac{xe^x}{e^x-1} = \frac{x}{1-e^{-x}}
\end{aligned}
$$

である。

ところで、$R(x) \equiv M(x) - \frac{1}{2}x$ とすると

$$
\begin{aligned}
R(-x) &= M(-x) + \frac{1}{2}x \\
&= \frac{-x}{1-e^x} + \frac{x}{2} \\
&= x\frac{-2+1-e^x}{2(1-e^x)} \\
&= x\frac{-1-e^x}{2(1-e^x)} \\
&= x\frac{1+e^{-x}+1-e^{-x}}{2(1-e^{-x})} - \frac{1}{2}x \\
&= \frac{x}{1-e^{-x}} - \frac{1}{2}x \\
&= R(x)
\end{aligned}
$$

であり、$R(x)$ は偶関数である。このとき

$$
\begin{aligned}
0 &= R(x) - R(-x) \\
&= \sum_{d=2}^{\infty} \frac{B_d}{d!}x^d - \sum_{d=2}^{\infty} \frac{B_d}{d!}(-x)^d \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} 2\frac{B_{2i+1}}{(2i+1)!}x^{(2i+1)}
\end{aligned}
$$

が成立する。これは、次の定理を意味する。

定理 3.1 d が 3 以上の奇数のとき、ベルヌーイ数 B_d について $B_d = 0$ が成立する。

3.2.1 アルゴリズムの改善

3 以上の奇数についてベルヌーイ数が 0 であることを利用すると、アルゴリズムを改善できる。単純な結果

$$
\begin{aligned}
a_d^{(d)} &= \frac{1}{d+1} \\
a_{d-1}^{(d)} &= \frac{1}{2} \\
a_{d-2}^{(d)} &= \frac{d}{12}
\end{aligned}
$$

も踏まえてまとめなおすと、次のようになる。

1. $a_d^{(d)} = \dfrac{1}{d+1}$ により最大次数の係数を求める。
2. $a_{d-1}^{(d)} = \dfrac{1}{2}$ により 2 番目に大きい次数の係数を求める。
3. $a_{d-2}^{(d)} = \dfrac{d}{12}$ により 3 番目に大きい次数の係数を求める。
4. $S^{(d-1)}(n)$ の係数から $a_j^{(d)} = \dfrac{d}{j+1} \cdot a_{j-1}^{(d-1)}$ の関係式より $a_1^{(d)}, \cdots, a_{d-3}^{(d)}$ を求める。
5. （d が偶数のとき）すでに得られた $a_1^{(d)}, \cdots, a_d^{(d)}$ を合計し 1 から減じて $a_0^{(d)} = 1 - \left(a_1^{(d)} + \cdots + a_d^{(d)}\right)$ を得る。
6. （d が 3 以上の奇数のとき）$a_0^{(d)} = 0$ とする。

参考文献

[1] Wikipedia ベルヌーイ数 2015 年 11 月 22 日

[2] Wikipedia ファウルハーバーの公式 2015 年 11 月 22 日