測度・ルベーグ積分及び確率

酒匂貴市

平成 23 年 1 月 20 日

目 次

第 I 部
測度

1　集合関連

測度とは、集合の「大きさ」のようなものを論じる道具であり、議論を進める上で、集合に関する知識は必要不可欠である。ここでは、集合の演算と記号について注意しておくべきことを述べておく。

1.1　集合演算関連

集合列 $A_1, A_2, \cdots, A_N$ について、その**和集合 (合併集合)** を

$$\bigcup_{n=1}^{N} A_n \equiv A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_N$$

のように表し、**共通部分 (交わり)** を

$$\bigcap_{n=1}^{N} A_n \equiv A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_N$$

のように表す。$N = \infty$ の場合も考察対象になってくる。また、集合列 $A_1, A_2, \cdots, A_N$ の**どの二つも共通点を持たない**(任意の $i \neq j$ に対し $A_i \cap A_j = \phi$) ときその和集合を**直和**といい、以下のように表す。

$$\sum_{n=1}^{N} A_n \equiv A_1 + A_2 + \cdots + A_N$$

また、集合 A の元で集合 B に属さないものの全体のなす集合を、**差集合**といい、以下のような記号で表す。

$$A - B \equiv A \backslash B \equiv \{x \in A; x \notin B\}$$

この $A - B$ という記号と $A \backslash B$ という記号は、今のように特に区別されず定義されることも珍しくないが、本稿では基本的に $\underline{A \supset B \text{ の時に } A - B}$ を、それ以外の時には $A \backslash B$ を用いることにする。

集合演算に関しては、次の**分配律**に注意を促しておく。

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C) \tag{1}$$

$$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C) \tag{2}$$

$$\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \right) \cap C = \bigcup_{n=1}^{\infty} (A_n \cap C) \tag{3}$$

$$\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \right) \cup C = \bigcap_{n=1}^{\infty} (A_n \cup C) \tag{4}$$

下の二式は、より一般化された分配律である。

ある全体集合 U の部分集合のみを考えるとき、$X \subset U$ なる集合 X に対して、**補集合**を

$$X^c \equiv U - X$$

と定義し、上のように表す。明らかに $(X^c)^c = X$ であり、また、次の**ド・モルガン (de Morgan) の法則**が成り立つ。

$$\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \right)^c = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n^c \qquad \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \right)^c = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n^c \tag{5}$$

1.2　集合列とその極限

集合列の極限に関しては、あまり他の分野で扱われることが無いので、注意して見たほうがよいだろう。特に、素朴な面積・体積・長さといった概念から、測度という概念を生み出す上で、加算加法性 (後述) を橋頭堡として極限が積極的に導入された経緯もあり、重要である。しかし、どうしてもつかみがたいなら、さしあたり今はとばして、必要になったときにまた戻ってくるというのも読み方としてはいいだろう。

定義 1.1 集合列 $\{A_n\}$ に対して、

$$\overline{\lim}\, A_n \equiv \limsup A_n \equiv \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$$

を**上極限集合**といって、上のような記号で表す。また、

$$\underline{\lim}\, A_n \equiv \liminf A_n \equiv \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k$$

を**下極限集合**といって、上のような記号で表す。◂

これらは、数列の上極限 $\inf_n \sup_{v \geq n} a_v$, 下極限 $\sup_n \inf_{v \geq n} a_v$ と対応した形になっている。これだけではよく理解できないので、同値な言い換えを考える。

補題 1.1

$$x \in \overline{\lim}\, A_n \leftrightarrow \text{すべての項が}\, x \,\text{を含む、項数無限の部分列}\, \{A_{n_1}, A_{n_2}, \cdots\} \,\text{をとれる。}$$

(proof)

まず、$x \in \overline{\lim}\, A_n \quad \leftrightarrow \quad x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k \quad \leftrightarrow \quad$ 任意の自然数 n に対して $x \in \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$ である。このとき、まず n=1 のときを考えると、$x \in \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ すなわち、x を含む A_k がひとつは存在するということである。そのうち最小のものを A_{n_1} とし、前と同様に今度は $n = n_1 + 1$ で考えると、$x \in \bigcup_{k=n_1+1}^{\infty} A_k$ すなわち $A_{n_1+1}, \cdots$ に x を含むものが必ずひとつは存在するということになる。そのうち最小のものを A_{n_2} として、次は $n = n_2 + 1$ で考える。これを繰り返せば、必要性が示される。

十分性に関しても、すべての項が x を含む項数無限の部分列 $\{A_{n_1}, A_{n_2}, \cdots\}$ をとることができれば、任意の自然数 n に対して $x \in \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$ となることは明らかなので、示される。 証明終

補題 1.2

$$x \in \underline{\lim}\, A_n \quad \leftrightarrow \quad \text{ある自然数}\, n_0 \text{が存在し、}n \geq n_0 \text{なら}\, x \in A_n \text{となる。}$$

(proof)

まず、

$$x \in \underline{\lim}\, A_n \quad \leftrightarrow \quad x \in \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k \quad \leftrightarrow \quad x \in \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k \text{となる自然数}\, n \,\text{がひとつは存在する。}$$

であり

$$x \in \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k \quad \leftrightarrow \quad k \geq n \,\text{なら}\, x \in A_k$$

である。 証明終

定理 1.3 $\underline{\lim} A_n \subset \overline{\lim} A_n$

(proof)

$x \in \underline{\lim} A_n$ ならば、$\{A_{n_0}, A_{n_0+1}, \cdots\}$ はすべて x を含むのだから、これは、すべての項が x を含む項数無限の部分列であり、$x \in \overline{\lim} A_n$ となる。 証明終

逆は一般には成立しない。なぜなら、下極限は A_{n_0} 以降の項すべてが x を含むことを要求しているが、上極限は無限に x が含む項があることを保証しつつも、間に x を含まない項が入ることを許容しているからである。

定義 1.2 $\underline{\lim} A_n = \overline{\lim} A_n$ となるとき、集合列 $\{A_n\}$ は**収束する**といい、このときの集合 $\underline{\lim} A_n = \overline{\lim} A_n$ を**極限集合**といい、$\lim \mathbf{A_n}$ で表す。定理 *1.3* より、$\underline{\lim} A_n \supset \overline{\lim} A_n$ であることが必要十分である。◂

1.3 増加列及び減少列

以下に定義する増加列及び減少列に関しては、収束はわかりやすい形で現れる。

定義 1.3 集合列 $\{A_n\}$ について、

$$A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \cdots$$

が成り立つとき、**増加列**であるという。また、

$$A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \cdots$$

が成り立つとき、**減少列**であるという。◂

定理 1.4 増加列は、極限集合 $\lim A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ を以て収束する。

(proof)

増加列に関しては、$\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k = A_n$ となるので、下極限集合は、

$$\underline{\lim} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$$

である。また、増加列であれば、和集合 $\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$ は、結局 n に関わらず $k \to \infty$ は決まる、つまり $\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$ は n によらず等しいので、その n に関する共通部分をとってもそのまま

$$\overline{\lim} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$$

であり、確かに $\underline{\lim} A_n = \overline{\lim} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ である。 証明終

定理 1.5 減少列は、極限集合 $\lim A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ を以て収束する。

(proof)

減少列に関しては、$\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k = A_n$ となるので、上極限集合は、

$$\overline{\lim}\, A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$$

である。また、減少列であれば、共通部分 $\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k$ は、結局 n に関わらず $k \to \infty$ で決まる、つまり $\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k$ は n によらず等しいので、その n に関する和集合をとってもそのまま

$$\underline{\lim}\, A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$$

であり、確かに $\underline{\lim}\, A_n = \overline{\lim}\, A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ である。 $\boxed{\text{証明終}}$

1.4 加算加法族・ボレル集合体

測度論では、加算加法族とよばれる集合族が重要である。詳しいことは、後で述べられるが (13p)、その条件は、加算加法的な測度を持つ部分集合の集合族に求められる条件となっている。

定義 1.4 ある集合 X の部分集合族 $\mathfrak{B}$ が、以下の条件

1. $\phi \in \mathfrak{B}$
2. $A \in \mathfrak{B}$ なら $A^c \in \mathfrak{B}$
3. $A_1, A_2, \cdots \in \mathfrak{B}$ なら $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathfrak{B}$

を満たす時、集合族 $\mathfrak{B}$ を**加算加法族・完全加法族**（$\sigma-$ **加法族・ボレル集合体**）という。という。◂

定理 1.6 集合 X の部分集合から成る加算加法族 $\mathfrak{B}$ について、以下の性質が成り立つ。

1. $X \in \mathfrak{B}$
2. $A_1, A_2, \cdots \in \mathfrak{B}$ なら $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathfrak{B}$
3. $A_1, \cdots, A_N \in \mathfrak{B}$ なら $\bigcup_{n=1}^{N} A_n \in \mathfrak{B}$
4. $A_1, \cdots, A_N \in \mathfrak{B}$ なら $\bigcap_{n=1}^{N} A_n \in \mathfrak{B}$
5. $A, B \in \mathfrak{B}$ のとき $A \cup B, A \cap B, A \backslash B \in \mathfrak{B}$

(proof)

(1.) 加算加法族の定義 1. 及び 2. より明らか。

(2.) 加算加法族の定義 2. より $A_1^c, A_2^c, \cdots \in \mathfrak{B}$ である。したがって、定義 3. 及びド・モルガン則より

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n^c = \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \right)^c \in \mathfrak{B}$$

したがって、定義 2. より $\displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \mathfrak{B}$ である。

(3.) 集合列 $A_1, A_2, \cdots, A_N, A_N, \cdots$ に定義 3. を適用する。

(4.) 集合列 $A_1, A_2, \cdots, A_N, A_N, \cdots$ にこの定理の 2. を適用する。

(5.)$A \cup B, A \cap B \in \mathfrak{B}$ はこの定理の 3. 及び 4. の系である。また、$A, B \in \mathfrak{B}$ なら定義 2. より $A, B^c \in \mathfrak{B}$ よって、$A \backslash B = A \cap B^c \in \mathfrak{B}$ である。 $\boxed{\text{証明終}}$

ここで、証明に便利な命題を準備しておくことにする。これは、集合列の和集合を、共通点のない他の集合列の直和に書き直す方法を示したものである。今後も少なからず参照されることになるだろう。

補題 1.7 集合列 $\{A_n\}$ から、新しい集合列 $\{B_n\}$ を

$$\begin{aligned}
&B_1 = A_1 \\
&B_2 = A_2 \backslash A_1 \quad (= A_2 \cap A_1^c) \\
&B_3 = A_2 \backslash [A_1 \cup A_2] \quad (= A_3 \cap A_1^c \cap A_2^c) \\
&\quad \vdots \\
&B_n = A_n \backslash [A_1 \cup \cdots \cup A_{n-1}] \quad (= A_n \cap A_1^c \cap A_2^c \cap \cdots \cap A_{n-1}^c) \\
&\quad \vdots
\end{aligned}$$

という規則で作ると、集合列 $\{B_n\}$ は、互いに共通部分を持たず、

$$\sum_{n=1}^{\infty} B_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$$

である。また、集合列 $\{A_n\}$ の要素が、すべてある加算加法族 $\mathfrak{B}$ に含まれる $(A_i \in \mathfrak{B})$ なら、集合列 $\{B_n\}$ の要素もすべてそれに含まれる $(B_i \in \mathfrak{B})$。

(proof)

定義より、添字の小さい方は、添字の大きい方から除かれているので $B_i \cap B_j (j < i) = \phi$ となる。これは結局、ある二つの要素をとったとき、その添字が異なりさえすれば共通部分が無いということを表しており、集合列 $\{B_n\}$ は互いに共通部分が無いと言える。

また、命題 $\displaystyle\sum_{n=1}^{N} B_n = \bigcup_{n=1}^{N} A_n$ について。$N = 1$ のときは、自明である。$N = k - 1$ のとき正しいとして、$N = k$ のときを考えると

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{k} B_n &= \sum_{n=1}^{k-1} B_n + B_k \\
&= \bigcup_{n=1}^{k-1} A_n + A_k \backslash [A_1 \cup \cdots \cup A_{k-1}] = \bigcup_{n=1}^{k} A_n
\end{aligned}$$

であり、この場合も成立する。よって

$$\sum_{n=1}^{\infty} B_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$$

である。

さらに、$A_1, A_2, \cdots \in \mathfrak{B}$ であるとき、加算加法族の定義 2. および定理 1.6 より、加算加法族に属する集合の補集合と共通部分は、やはり加算加法族に含まれるので

$$\begin{aligned}
B_1 &= A_1 \\
B_2 &= A_2 \cap A_1^c \\
B_3 &= A_3 \cap A_1^c \cap A_2^c \\
&\ \vdots \\
B_n &= A_n \cap A_1^c \cap A_2^c \cap \cdots \cap A_{n-1}^c \\
&\ \vdots
\end{aligned}$$

より集合列 $\{B_n\}$ の全要素は加算加法族に含まれる。 $\boxed{\text{証明終}}$

加算加法族の定義は、次のようにも言い換えられる。

定理 1.8 集合 X の部分集合族 $\mathfrak{B}$ が加算加法族であることと、以下の条件は同値である。

1. $\phi \in \mathfrak{B}$ (同じ)

2. $A \in \mathfrak{B}$ なら $A^c \in \mathfrak{B}$ (同じ)

3. $A, B \in \mathfrak{B}$ のとき $A \cap B \in \mathfrak{B}$

4. 互いに共通部分の無い集合列 $\{A_n\}$ に関し $A_1, A_2, \cdots \in \mathfrak{B}$ なら直和 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathfrak{B}$

(proof)

加算加法族の定義から、上の 1. から 4. の条件が成立することは明らか。逆に、この定理の条件が成立する時、加算加法族となることを示す。証明の手順を標語的に述べれば、補題 1.7 の方法により、和集合 $A_1 \cup +A_2 \cup \cdots$ を、共通点の無い加算加法族に属する集合列の直和に分解することによって証明する、ということになる。

$A_1, A_2, \cdots \in \mathfrak{B}$ であるとき

$$\begin{aligned}
B_1 &= A_1 \\
B_2 &= A_2 \cap A_1^c \quad (= A_2 \backslash A_1) \\
B_3 &= A_3 \cap A_1^c \cap A_2^c \quad (= A_2 \backslash [A_1 \cup A_2]) \\
&\ \vdots \\
B_n &= A_n \cap A_1^c \cap A_2^c \cap \cdots \cap A_{n-1}^c \quad (= A_n \backslash [A_1 \cup \cdots \cup A_{n-1}]) \\
&\ \vdots
\end{aligned}$$

とすると、補題 1.7 より、集合列 $\{B_n\}$ の集合はすべて $\mathfrak{B}$ に含まれ、互いに共通部分が無く

$$B_1 + B_2 + \cdots = A_1 \cup A_2 \cup \cdots$$

である。仮定の条件 4. より

$$B_1 + B_2 + \cdots \in \mathfrak{B}$$

である。よって、

$$B_1 + B_2 + \cdots = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \in \mathfrak{B}$$

となり、加算加法族の定義 3. を満たすことになる。 $\boxed{\text{証明終}}$

2　加算加法性を持つ測度

ここで述べようとしている測度とは、感覚的にいえば、長さ・面積・体積といったものが持っている共通の性質を保存しつつ、一般の集合について拡張したものである。まずこの章では、どんなときに測度があるのかといった可測性の議論は後に回して、抽象的な測度を定義し、それがどのような性質を持つかについて論じる。

2.1　測度の定義

定義 2.1 集合 X とその部分集合から成る加算加法族[1] $\mathfrak{B}$ が与えられたとき、

$$\text{集合関数}\ m : \mathfrak{B} \to \boldsymbol{R} \cup \{\infty\}$$

が、以下の条件

1. $\boxed{\text{非負性}}$　$A \in \mathfrak{B}$ に対し $0 \leq m(A) \leq \infty$
2. $\boxed{\textbf{加算加法性}}$　互いに共通部分の無い集合列 $A_1, \cdots \in \mathfrak{B}$ に対し

$$m\left(\sum_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} m(A_n) \tag{6}$$

3. $m(\phi) = 0$ [2]

を満たす時、集合関数 m を $\mathfrak{B}$ 上の**測度**といい、$\mathfrak{B}$ に属する集合を**可測集合**という。◂

定義 2.2 集合 X とその部分集合から成る加算加法族 $\mathfrak{B}$、及び $\mathfrak{B}$ 上の測度が与えられたとき、**測度空間**が与えられたといい、その測度空間を $X(\mathfrak{B}, m)$ のように表す。特に、$m(X) < \infty$ が成り立つとき、有界な測度空間であるという。◂

定義 2.3 測度空間 $X(\mathfrak{B}, m)$ が与えられたとき、$m(A) = 0$ となる $A \in \mathfrak{B}$ を**零集合**という。空集合は定義より零集合であるが、零集合はかならずしも空集合ではないことには注意すべきである。*(*例えば、カントール集合など。*)* ◂

定義 2.4 測度空間 $X(\mathfrak{B}, m)$ とその各要素 $x \in X$ に関する命題 $P(x)$ について、ある零集合 N が存在して

$$x \in N^c \quad \to \quad P(x)\ \text{が真}$$

となるならば、命題 $P(x)$ は**ほとんど至るところ（*almost everywhere*）**成立するといい、

$$P(x) \quad a.e.$$

のように表す。◂

定理 2.1 測度空間 $X(\mathfrak{B}, m)$ が与えられたとき、その可測集合 $Y \subset X$ をとると、$\mathfrak{B}' \equiv \{A \in \mathfrak{B}; A \subset Y\}$ によって $Y(\mathfrak{B}', m)$ は測度空間である。

(proof)
容易。証明略。 $\boxed{\text{証明終}}$

[1] 確認:補集合は、全体集合を X として考える。
[2] 加算加法族は定義より必ず空集合を含む。

2.1.1 加算加法性

加算加法性は、極限の考えを測度に適用するための橋頭堡である。これから、諸々の性質が導かれることを見ていくことになろう。

古典的な面積などの概念、これは**ジョルダン測度**としてまとめられているが、これは、加算加法性の代わりに、**有限加法性**

$$\text{互いに共通部分の無い集合列 } A_1, \cdots, A_N \in \mathfrak{B} \text{ に対し} \quad m\left(\sum_{n=1}^{N} A_n\right) = \sum_{n=1}^{N} m(A_n)$$

を用いることで定義されている。しかし、有限加法性はある種の極限操作に関しては弱い面を持っており、それがリーマン積分のいわゆる「弱点」につながってくるのである。

2.1.2 無限大の扱い

測度においては、任意の実数より大きいものを表す記号としての無限大 ∞ を積極的に扱う。しかし、$\infty - \infty$ **を計算できない**ことには注意を払わなくてはならない。

2.1.3 加算加法族の意義

測度を加算加法族上に定義するということは、可測性をもつ集合にどんな条件を課すかということに関係している。加算加法族については 8p に記しているが、もう一度記せば、その定義の要請する条件は以下の通りである。

1. $\phi \in \mathfrak{B}$
2. $A \in \mathfrak{B}$ なら $A^c \in \mathfrak{B}$
3. $A_1, A_2, \cdots \in \mathfrak{B}$ なら $\displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathfrak{B}$

測度を加算加法族上に定義するということを、これらを参照しつつ述べれば、

1. 空集合 ϕ は可測である。
2. ある集合が可測なら、その補集合も可測である。
3. 集合列 $A_1, A_2, \cdots$ が可測なら、$\displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ も可測である。

ということになる。測度・可測集合とはそういうものだということを規定するために、加算加法族が用いられているのである。

2.2 有限加法性から導かれる測度の性質

定理 2.2 有限加法性 互いに共通部分の無い集合列 $A_1, \cdots, A_N \in \mathfrak{B}$ に対し

$$m\left(\sum_{n=1}^{N} A_n\right) = \sum_{n=1}^{N} m(A_n)$$

(proof)

集合列 $A_1, \cdots, A_N, \phi, \phi, \cdots$ に加算加法性 (6) を適用する。 証明終

定理 2.3 モジュラ性 可測集合 A, B について $m(A \cup B) + m(A \cap B) = m(A) + m(B)$

(proof)
$A - A \cap B, B - A \cap B, A \cap B$ の 3 つに分けて考える。$A = (A - A \cap B) + A \cap B, B = (B - A \cap B) + A \cap B$ から有限加法性 (定理 2.2) より

$$m(A) = m(A - A \cap B) + m(A \cap B) \quad m(B) = m(B - A \cap B) + m(A \cap B) \tag{7}$$

であり、$A \cup B = (A - A \cap B) + (B - A \cap B) + A \cap B$ から有限加法性より

$$\begin{aligned} m(A \cup B) &= m(A - A \cap B) + m(B - A \cap B) + m(A \cap B) \\ &= \{m(A) - m(A \cap B)\} + \{m(B) - m(A \cap B)\} + m(A \cap B) \quad \because \text{式 (7)} \\ &= m(A) + m(B) - m(A \cap B) \end{aligned}$$

となる。 証明終

定理 2.4 測度空間 $X(\mathfrak{B}, m)$ とその可測集合 A について $m(A^c) = m(X) - m(A)$

(proof)
$X = A + A^c$ から有限加法性 (定理 2.2) より $m(X) = m(A) + m(A^c)$ 証明終

補題 2.5 可測集合 $A \subset B$ について $m(B - A) = m(B) - m(A)$

(proof)
$B = (B - A) + A$ より有限加法性 (定理 2.2) から $m(B) = m(B - A) + m(A)$ したがって $m(B - A) = m(B) - m(A)$ 証明終

定理 2.6 単調性 可測集合 A, B について $A \subset B$ なら $m(A) \leq m(B)$

(proof)
補題 2.5 より

$$m(B) = m(B - A) + m(A) \geq m(A) \quad \because m(B - A) \geq 0$$

証明終

補題 2.7 測度空間 $X(\mathfrak{B}, m)$ について任意の $A \in \mathfrak{B}$ に対し $m(A) \leq m(X)$

(proof)
$\mathfrak{B}$ は、X の部分集合族であるから、$A \subset X$ である。よって単調性 (定理 2.6) より $m(A) \leq m(X)$ となる。
証明終

定理 2.8 有限劣加法性 集合列 $A_1, \cdots, A_N \in \mathfrak{B}$ に対し

$$m\left(\bigcup_{n=1}^{N} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{N} m(A_n)$$

(proof)
一般の劣加法性について後述するので、証明略。 証明終

2.3 加算加法性から導かれる測度の性質

定理 2.9 劣加法性 集合列 $A_1, \cdots \in \mathfrak{B}$ に対し

$$m\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} m(A_n)$$

(proof)

補題 1.7 の方法を用いて、和集合 $A_1 \cup +A_2 \cup \cdots$ を、共通点の無い加算加法族に属する集合列の直和に分解することによって証明する。

$$\begin{aligned}
B_1 &= A_1 \\
B_2 &= A_2 \cap A_1^c \quad (= A_2 \backslash A_1) \\
B_3 &= A_3 \cap A_1^c \cap A_2^c \quad (= A_2 \backslash [A_1 \cup A_2]) \\
&\vdots \\
B_n &= A_n \cap A_1^c \cap A_2^c \cap \cdots \cap A_{n-1}^c \quad (= A_n \backslash [A_1 \cup \cdots \cup A_{n-1}]) \\
&\vdots
\end{aligned}$$

とすると、補題 1.7 より、集合列 $\{B_n\}$ の集合はすべて $\mathfrak{B}$ に含まれ、互いに共通部分が無く

$$B_1 + B_2 + \cdots = A_1 \cup A_2 \cup \cdots$$

である。また、定義より明らかに $B_n \subset A_n$ である。よって、

$$\begin{aligned}
m\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) &= m\left(\sum_{n=1}^{\infty} B_n\right) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} m(B_n) \quad \because \text{加算加法性} \\
&\leq \sum_{n=1}^{\infty} m(A_n) \quad \because B_n \subset A_n \text{及び単調性 (定理 2.6)}
\end{aligned}$$

証明終

加算加法性は、特に極限の概念との親和性が高い。まずは、増加列及び減少列についてみる。集合の極限に関しては 6p に記している。また、定理 1.4 及び 1.5 により、増加列及び減少列は収束することが保証されている。

定理 2.10 単調極限定理 可測集合列 $\{A_n\}$ が増加列もしくは減少列のとき

$$m(\lim A_n) = \lim_{n\to\infty} m(A_n)$$

で確定する (収束するか正負の無限大に発散する)。ただし、減少列に関しては $m(A_1) < \infty$ でなければならない。[3]

[3]逆に、増加列に関しては、両辺が ∞ に発散するときのことも表している。

(proof)

まず、増加列についてみる。$m(A_n)=\infty$ となる項があれば、単調性 (定理 2.6) より、両辺ともに無限大となり、定理は示される。

次は、$m(A_n)<\infty$ の時を考える。定理 1.4 より $\lim A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ である。加算加法性を用いるために、補題 1.7 の方法を用いて直和の形にする。定理 1.8 や 2.9 と同様にすればよいのだが、増加列であることを用いると、より単純な

$$\begin{aligned}\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n &= A_1 + (A_2 - A_1) + (A_3 - A_2) + \cdots \\ &= A_1 + \sum_{n=2}^{\infty}(A_n - A_{n-1})\end{aligned}$$

という形になる。したがって、

$$\begin{aligned}m(\lim A_n) &= m\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \\ &= m\left(A_1 + \sum_{n=2}^{\infty}(A_n - A_{n-1})\right) \\ &= m(A_1) + \sum_{n=2}^{\infty} m(A_n - A_{n-1}) \quad \because \text{加算加法性 (6)} \\ &= \lim_{N\leftarrow\infty}\left[m(A_1) + \sum_{n=2}^{N} m(A_n - A_{n-1})\right] \\ &= \lim_{N\leftarrow\infty}\left[m(A_1) + \sum_{n=2}^{N}\{m(A_n) - m(A_{n-1})\}\right] \quad \because \text{補題 2.5} \\ &= \lim_{N\leftarrow\infty} m(A_N)\end{aligned}$$

となる。

減少列の場合は、$m(A_1)<\infty$ のとき、つまり単調性 (定理 2.6) より $m(A_n)<\infty$ の場合のみを扱う。新しい集合列を

$$B_n = A_1 - A_n$$

によって定めると、集合列 $\{B_n\}$ は増加列となるので、上で示した通り

$$m(\lim B_n) = \lim_{n\to\infty} m(B_n) \tag{8}$$

となる。ここで

$$
\begin{aligned}
\lim B_n &= \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \quad \because \text{定理 1.4(増加列の極限集合)} \\
&= \left\{ \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n^c \right\}^c \quad \because \text{ド・モルガン則} \\
&= \left\{ \bigcap_{n=1}^{\infty} (A_1 \cap A_n^c)^c \right\}^c \\
&= \left\{ \bigcap_{n=1}^{\infty} (A_1^c \cup A_n) \right\}^c \quad \because \text{ド・モルガン則} \\
&= \left\{ A_1^c \cup \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \right\}^c \quad \because \text{分配則 (4)} \\
&= A_1 \cap \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \right)^c \quad \because \text{ド・モルガン則} \\
&= A_1 - \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \right) \quad \because \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \subset A_1 \\
&= A_1 - \lim A_n \quad \because \text{定理 1.5(減少列の極限集合)}
\end{aligned}
$$

であり

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} m(B_n) &= \lim_{n\to\infty} m(A_1 - A_n) = \lim_{n\to\infty} \{m(A_1) - m(A_n)\} \quad \because \text{補題 2.5} \\
&= m(A_1) - \lim_{n\to\infty} m(A_n)
\end{aligned}
$$

なので、これらを式 (8) に代入すると

$$
\lim_{n\to\infty} m(A_n) = m(\lim A_n)
$$

となる。 証明終

ここからは、数列の下極限・上極限 (付録 145p 参照) も扱い、集合列のそれとの関連を論じる。

定理 2.11 可測集合列 $\{A_n\}$ について $m(\underline{\lim}\, A_n) \leq \underline{\lim}\, m(A_n)$

(proof)

新しい集合列を

$$
B_n = \bigcap_{k=n}^{\infty} A_n
$$

と定めると、集合列 $\{B_n\}$ は、n が大きくなるにつれ共通部分をとる $\{A_n\}$ の要素は減るため、増加列になる。したがって、定理 1.4 より、$\{B_n\}$ は極限集合

$$
\lim B_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_n = \underline{\lim}\, A_n \quad \because \text{下極限集合の定義} \tag{9}
$$

を以て収束する。また、集合列 $\{B_n\}$ は増加列なので、定理 2.10(単調極限定理) より

$$
m(\lim B_n) = \lim_{n\to\infty} m(B_n) \tag{10}
$$

である。さらに、集合列 $\{B_n\}$ の定義より $B_n \subset A_n$ であるから、単調性 (定理 2.6) より $m(B_n) \leq m(A_n)$ となる。この両辺の下極限をとると、定理 A.8 より

$$
\underline{\lim}\, m(B_n) \leq \underline{\lim}\, m(A_n) \tag{11}
$$

である。以上をまとめると

$$
\begin{aligned}
m(\underline{\lim}\, A_n) &= m(\lim B_n) && \because 式 (9) \\
&= \lim m(B_n) && \because 式 (10) \\
&= \underline{\lim}\, m(B_n) && \because m(B_n) が収束することから定理 A.7 \\
&\leq \underline{\lim}\, m(A_n) && \because 式 (11)
\end{aligned}
$$

よって示された。 $\boxed{\text{証明終}}$

定理 2.12 可測集合列 $\{A_n\}$ について $m(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_n) < \infty$ なら $m(\overline{\lim}\, A_n) \geq \overline{\lim}\, m(A_n)$

(proof)

新しい集合列を

$$B_n = \bigcup_{k=n}^{\infty} A_n$$

と定めると、集合列 $\{B_n\}$ は、n が大きくなるにつれ和集合をとる $\{A_n\}$ の要素は減るため、減少列になる。したがって、定理 1.5 より、$\{B_n\}$ は極限集合

$$\lim B_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_n = \overline{\lim}\, A_n \quad \because 上極限集合の定義 \tag{12}$$

を以て収束する。また、集合列 $\{B_n\}$ は減少列で $m(B_1) = m(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_n) < \infty$ なので定理 2.10(単調極限定理) より

$$m(\lim B_n) = \lim_{n\to\infty} m(B_n) \tag{13}$$

である。さらに、集合列 $\{B_n\}$ の定義より $B_n \supset A_n$ であるから、単調性 (定理 2.6) より $m(B_n) \geq m(A_n)$ となる。この両辺の上極限をとると、定理 A.8 より

$$\underline{\lim}\, m(B_n) \geq \underline{\lim}\, m(A_n) \tag{14}$$

である。以上をまとめると

$$
\begin{aligned}
m(\overline{\lim}\, A_n) &= m(\lim B_n) && \because 式 (12) \\
&= \lim m(B_n) && \because 式 (13) \\
&= \overline{\lim}\, m(B_n) && \because m(B_n) が収束することから定理 A.7 \\
&\geq \underline{\lim}\, m(A_n) && \because 式 (14)
\end{aligned}
$$

よって示された。 $\boxed{\text{証明終}}$

補題 2.13 <u>ファトゥー *(Fatou)* の補題</u>　可測集合列 $\{A_n\}$ について $m\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_n\right) < \infty$ なら

$$m(\underline{\lim}\, A_n) \leq \underline{\lim}\, m(A_n) \leq \overline{\lim}\, m(A_n) \leq m(\overline{\lim}\, A_n)$$

(proof)

定理 2.12 及び定理 2.12 及び定理 A.6 より示される。 $\boxed{\text{証明終}}$

定理 2.14 $m\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_n\right) < \infty$ で可測集合列 $\{A_n\}$ が収束するならば $m(\lim A_n) = \lim_{n\to\infty} m(A_n)$

(proof)
可測集合列 $\{A_n\}$ が収束するということは

$$\lim A_n = \underline{\lim}\, A_n = \overline{\lim}\, A_n$$

となることである。$m\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_n\right) < \infty$ でもあるので、このとき、ファトゥーの補題 (補題 2.13) より

$$m(\lim A_n) \leq \underline{\lim}\, m(A_n) \leq \overline{\lim}\, m(A_n) \leq m(\lim A_n)$$

つまり

$$\underline{\lim}\, m(A_n) = \overline{\lim}\, m(A_n) = m(\lim A_n)$$

である。したがって、定理 A.7 より

$$\lim_{n\to\infty} m(A_n) = m(\lim A_n)$$

に収束する。 $\boxed{\text{証明終}}$

2.4 完備性

完備という言葉は数学では非常に良く使われるが、測度空間に関しては、次の意味で用いられる。

定義 2.5 測度空間 $X(\mathfrak{B}, m)$ が**完備**であるとは、零集合のすべての部分集合が可測集合となる、すなわち $\mathfrak{B}$ に含まれることである。単調性より、これらはすべて零集合である。◂

これは、あらゆる測度空間に関して、常に成り立っているわけではない。

3 カラテオドリ外測度

前章で、抽象的な加算加法的な測度の性質について述べた。しかし、測度空間の理論だけでは、実際の対象、特に $\boldsymbol{R}^n$ にいかに加算加法的な測度を構成すればよいか全く分からない。そこで、まず、加算加法的な測度を抽象的な対象に対し構成しする中間的な枠組みとして、カラテオドリ外測度を論じる。そして、その後、カラテオドリ外測度を $\boldsymbol{R}^n$ に適用したルベーグ外測度について述べる。

3.1 カラテオドリ外測度

定義 3.1 集合 X の冪集合 *(*部分集合の全体から成る部分集合族*)*$\mathbf{2}^X$ が与えられたとき

$$\text{集合関数}\ m^* : \mathbf{2}^X \to \boldsymbol{R} \cup \{\infty\}$$

が、以下の条件

1. $\boxed{\text{非負性}}$ $A \in \mathbf{2}^X$ に対し $0 \leq m^*(A) \leq \infty$
2. $\boxed{\text{単調性}}$ $A, B \in \mathbf{2}^X$ が $A \subset B$ なら $m(A) \leq m(B)$
3. $\boxed{\text{劣加法性}}$ 集合列 $A_1, A_2, \cdots \in \mathbf{2}^X$ に対し
$$m^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} m^*(A_n)$$
4. $m^*(\phi) = 0$

を満たす時、集合関数 m^* を X 上の**カラテオドリ外測度**もしくは単に**外測度**という。◂

カラテオドリ外測度は、**すべての部分集合**に対して定義されなければならない。また、同じ対象に定義されるカラテオドリ外測度も、必ずしも一意的には定まらない。

定理 3.1 <u>有限劣加法性</u> 集合 X 上にカラテオドリ外測度 m^* が定義されているとき、集合列 $A_1, \cdots, A_N \in \mathbf{2}^X$ に対し

$$m^*\left(\bigcup_{n=1}^{N} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{N} m^*(A_n)$$

となる。

(proof)
集合列 $A_1, \cdots, A_N, \phi, \phi, \cdots$ に対しカラテオドリ外測度の劣加法性 (定義 3.) を適用する。 $\boxed{\text{証明終}}$

補題 3.2 集合 X 上にカラテオドリ外測度 m^* が定義されているとき、任意の $A, B \subset X$ に対して

$$m^*(B) \leq m^*(B \cap A) + m^*(B \cap A^c)$$

となる。

(proof)
集合列 $B \cap A, B \cap A^c$ に対して有限劣加法性 (定理 3.1) を適用すると

$$\begin{aligned} m^*([B \cap A] \cup [B \cap A^c]) &\leq m^*(B \cap A) + m^*(B \cap A^c) \\ m^*(B) &\leq m^*(B \cap A) + m^*(B \cap A^c) \end{aligned}$$

$\boxed{\text{証明終}}$

3.2 可測性

可測である、すなわち測度を定義できるとはどういうことであろうか。抽象的な対象の測度というものはもともと存在するものではないのだから、どう定義するかはかなり恣意的である。しかし、いまは、長さや面積・体積の延長として測度を考えているのだから、それらが満たしている性質のうちからどれかを選び出すということになるだろう。その一部は、すでにカラテオドリ外測度の定義として用いられているから、それ以外で、しかも加算加法性をもたらすようなものであってほしいということになる。そして、実際にカラテオドリが導入したのは以下のようなものであった。

定義 3.2 集合 X 上にカラテオドリ外測度 m^* が定義されているとする。このとき $A \subset X$ について、任意の $E \subset X$ に対し

$$\boxed{m^*(E) = m^*(E \cap A) + m^*(E \cap A^c)} \tag{15}$$

が成り立つとき、A は m^* に関して *(*カラテオドリの意味で*)* **可測**であるという。◂

これを面積の用語で述べれば、ある図形 A が可測であるとは、他の別の図形 E を重ねた時に、A と E が重なった部分の面積と、A と重なって無い E の部分の面積を足すと、E の面積になる、ということであり、面積としては確かに、至極当然成り立つことである。

上の定義は、ただちに、下のように、より緩い形に言い換えられる。実際には、**下の定理の形で、可測性を表すことが多い**。以下、明示せずに用いることもありえる。

定理 3.3 集合 X 上にカラテオドリ外測度 m^* が定義されているとき、任意の $E \subset X$ に対して

$$m^*(E) \geq m^*(E \cap A) + m^*(E \cap A^c) \tag{16}$$

であることと、$A(\subset X)$ が可測であることは同値である。

(proof)

補題 3.2 より

$$m^*(E) \leq m^*(E \cap A) + m^*(E \cap A^c)$$

なので、定理の条件を満たせば

$$m^*(E) = m^*(E \cap A) + m^*(E \cap A^c)$$

となる。逆も明らか。 証明終

補題 3.4 集合 X 上にカラテオドリ外測度 m^* が定義されているとき、m^* について可測で互いに共通部分の無い集合列 $\{A_n\}$ と任意の $E \subset X$ について

$$m^*(E) \geq \sum_{n=1}^{\infty} m^*(E \cap A_n) + m^*\left(E \cap \left\{\sum_{n=1}^{\infty} A_n\right\}^c\right)$$
$$m^*(E) \geq \sum_{n=1}^{N} m^*(E \cap A_n) + m^*\left(E \cap \left\{\sum_{n=1}^{N} A_n\right\}^c\right)$$

が成立する。

(proof)

まず、任意の自然数 N について

$$m^*(E) \geq \sum_{n=1}^{N} m^*(E \cap A_n) + m^*\left(E \cap \left\{\sum_{n=1}^{N} A_n\right\}^c\right)$$

が成立することを示す。

(i)$N = 1$ のとき。A_1 は m^* について可測なので、定理 3.3 より任意の $E \subset X$ について

$$m^*(E) \geq m^*(E \cap A_1) + m^*(E \cap A_1^c)$$

であり、この場合は成立する。

(ii)$N = k$ のとき成立するとして $N = k+1$ のとき。$B_n \equiv \sum_{n=1}^{k} A_n$ とおいておく。仮定より任意の $F \subset X$ について

$$\begin{aligned} m^*(F) &\geq \sum_{n=1}^{k} m^*(F \cap A_n) + m^*\left(F \cap \left\{\sum_{n=1}^{k} A_n\right\}^c\right) \\ &= \sum_{n=1}^{k} m^*(F \cap A_n) + m^*\left(F \cap B_k^c\right) \end{aligned} \tag{17}$$

である。ここで任意の $E \subset X$ をとり、$F = E \cap B_k$ を代入してみると

$$\begin{aligned} m^*(E \cap B_k) &\geq \sum_{n=1}^{k} m^*(E \cap B_k \cap A_n) + m^*\left(E \cap B_k \cap B_k^c\right) \\ &= \sum_{n=1}^{k} m^*(E \cap B_k \cap A_n) + m^*\left(E \cap \phi\right) \\ &= \sum_{n=1}^{k} m^*(E \cap A_n) + m^*\left(\phi\right) \quad \because B_k \supset A_n \\ &= \sum_{n=1}^{k} m^*(E \cap A_n) \quad \because m^*(\phi) = 0 \end{aligned}$$

となる。また、外測度の劣加法性等より

$$\begin{aligned} m^*(E \cap B_k) &= m^*\left(E \cap \sum_{n=1}^{k} A_n\right) \\ &= m^*\left(\sum_{n=1}^{k} \{E \cap A_n\}\right) \quad \because \text{一般化分配則 (3)} \\ &\leq \sum_{n=1}^{k} m^*(E \cap A_n) \quad \because \text{有限劣加法性 (定理 3.1)} \end{aligned}$$

でもある。したがって、あわせると

$$m^*(E \cap B_k) = \sum_{n=1}^{k} m^*(E \cap A_n) \tag{18}$$

であることがわかる。$E = F$ として、これを式 (17) に代入すると

$$m^*(F) \geq m^*(F \cap B_k) + m^*\left(F \cap B_k^c\right) \tag{19}$$

となる。これは定理 3.3 より、B_k が可測であるということでもある。

さて、このとき任意の $E \subset X$ に関して

$$\begin{aligned}
m^*(E) &\geq m^*(E \cap A_{k+1}) + m^*(E \cap A_{k+1}^c) \quad \because A_{k+1}\text{が可測より定理 3.3} \\
&\geq m^*(E \cap A_{k+1}) + [m^*(E \cap A_{k+1}^c \cap B_k) + m^*(E \cap A_{k+1}^c \cap B_k^c)] \quad \because \text{式 (19) で } F = E \cap A_{k+1}^c \text{とする。} \\
&= m^*(E \cap A_{k+1}) + [m^*(E \cap \{A_{k+1}^c \cap B_k\}) + m^*(E \cap \{A_{k+1} \cup B_k\}^c)] \quad \because \text{ド・モルガン則} \\
&= m^*(E \cap A_{k+1}) + [m^*(E \cap B_k) + m^*(E \cap B_{k+1}^c)] \quad \because A_{k+1}\text{と } A_1, \cdots, A_k\text{は互いに共通部分なし} \\
&= m^*(E \cap A_{k+1}) + \sum_{n=1}^{k} m^*(E \cap A_n) + m^*(E \cap B_{k+1}^c) \quad \because \text{式 (18)} \\
&= \sum_{n=1}^{k+1} m^*(E \cap A_n) + m^*(E \cap \left\{ \sum_{n=1}^{k+1} A_n \right\}^c)
\end{aligned}$$

であり、確かに $N = k+1$ のときも目標の式が成立する。

(i)(ii) より、帰納法の考えから、任意の N について目標の式が成立する。ここで

$$E \cap \left\{ \sum_{n=1}^{N} A_n \right\}^c = E \cap \left\{ \bigcap_{n=1}^{N} A_n^c \right\}$$

は、N について減少列なので収束し、極限集合は $E \cap \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} A_n \right\}^c$ である。よって $N \to \infty$ としたとき

$$\begin{aligned}
m^*(E) &\geq \lim_{N\to\infty} \left\{ \sum_{n=1}^{N} m^*(E \cap A_n) + m^*(E \cap \left\{ \sum_{n=1}^{N} A_n \right\}^c) \right\} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} m^*(E \cap A_n) + \lim_{N\to\infty} m^*(E \cap \left\{ \sum_{n=1}^{N} A_n \right\}^c) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} m^*(E \cap A_n) + m^*(E \cap \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} A_n \right\}^c) \quad \because \text{単調極限定理 2.10}
\end{aligned}$$

よって、この補題が成立する。 $\boxed{\text{証明終}}$

3.3 カラテオドリ外測度からの測度空間の構成

定理 3.5 集合 X 上にカラテオドリ外測度 m^* が定義されているとき、m^* について可測な集合全体は加算加法族となる。

(proof)

定理 1.8 の 4 条件を以て証明する。m^* について可測な集合全体の作る X の部分集合族を $\mathfrak{M}$ とおくと、定理 3.3 より

$$\mathfrak{M} = \{A \subset X | \text{ 任意の } E \subset X \text{ について } m^*(E) \geq m^*(E \cap A) + m^*(E \cap A^c)\}$$

と表せる。

(1.) 任意の $E \subset X$ について

$$m^*(E \cap \phi) + m^*(E \cap \phi^c) = m^*(\phi) + m^*(E) = m^*(E)$$

なので、$\phi \in \mathfrak{M}$ は成立する。

(2.) $A \in \mathfrak{M}$ ならば、任意の $E \subset X$ について

$$\begin{aligned} m^*(E) &\geq m^*(E \cap A) + m^*(E \cap A^c) \\ &= m^*(E \cap \{A^c\}^c) + m^*(E \cap \{A^c\}) \end{aligned}$$

なので、$A^c \in \mathfrak{M}$ である。

(3.) $A, B \in \mathfrak{M}$ ならば任意の $E \subset X$ について

$$\begin{aligned} m^*(E) &\geq m^*(E \cap A) + m^*(E \cap A^c) \quad \because A \in \mathfrak{M} \\ &\geq [m^*(\{E \cap A\} \cap B) + m^*(\{E \cap A\} \cap B^c)] + m^*(E \cap A^c) \quad \because B \in \mathfrak{M} \\ &= m^*(E \cap A \cap B) + m^*(E \cap A \cap B^c) + m^*(E \cap A^c) \\ &\geq m^*(E \cap A \cap B) + m^*(\{E \cap A \cap B^c\} \cup \{E \cap A^c\}) \quad \because \text{カラテオドリ外測度の劣加法性} \\ &= m^*(E \cap A \cap B) + m^*(E \cap [\{A \cap B^c\} \cup A^c]) \quad \because \text{分配則} \\ &= m^*(E \cap A \cap B) + m^*(E \cap [\{A^c \cup B\} \cap A]^c) \quad \because \text{ド・モルガン則} \\ &= m^*(E \cap A \cap B) + m^*(E \cap [\{A^c \cap A\} \cup \{B \cap A\}]^c) \quad \because \text{分配則} \\ &= m^*(E \cap A \cap B) + m^*(E \cap [\phi \cup \{B \cap A\}]^c) \\ &= m^*(E \cap \{A \cap B\}) + m^*(E \cap \{A \cap B\}^c) \end{aligned}$$

なので、$A \cap B \in \mathfrak{M}$ である。

(4.) 互いに共通部分の無い集合列 $\{A_n\}$ に関し $A_1, A_2, \cdots \in \mathfrak{B}$ ならば、任意の $E \subset X$ について、補題 3.4 より

$$\begin{aligned} m^*(E) &\geq \sum_{n=1}^{\infty} m^*(E \cap A_n) + m^*\left(E \cap \left\{\sum_{n=1}^{\infty} A_n\right\}^c\right) \\ &\geq m^*\left(\sum_{n=1}^{\infty}\{E \cap A_n\}\right) + m^*\left(E \cap \left\{\sum_{n=1}^{\infty} A_n\right\}^c\right) \quad \because \text{劣加法性} \\ &\geq m^*\left(E \cap \left\{\sum_{n=1}^{\infty} A_n\right\}\right) + m^*\left(E \cap \left\{\sum_{n=1}^{\infty} A_n\right\}^c\right) \quad \because \text{一般化分配則} \end{aligned}$$

なので、$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathfrak{M}$ である。

以上より、定理 1.8 から $\mathfrak{M}$ は加算加法族である。 $\boxed{\text{証明終}}$

定理 3.6 集合 X 上にカラテオドリ外測度 m^* が定義されているとき、各項が m^* について可測で互いに共通部分の無い集合列 $\{A_n\}$ に関しては、**加算加法性**、すなわち

$$m^*\left(\sum_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} m^*(A_n)$$

が成立する。

(proof)

まず、カラテオドリ外測度の劣加法性より

$$m^*\left(\sum_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} m^*(A_n)$$

が成立する。

また、補題 3.4 で、任意の集合として $\sum_{n=1}^{\infty} A_n \subset X$(定理 3.5 より可測である) を使うと

$$
\begin{aligned}
m^*\left(\sum_{n=1}^{\infty} A_n\right) &\geq \sum_{n=1}^{\infty} m^*\left(\left\{\sum_{n=1}^{\infty} A_n\right\} \cap A_n\right) + m^*\left(\left\{\sum_{n=1}^{\infty} A_n\right\} \cap \left\{\sum_{n=1}^{\infty} A_n\right\}^c\right) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} m^*(A_n) + m^*(\phi) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} m^*(A_n)
\end{aligned}
$$

が成立する。よって、以上より

$$
m^*\left(\sum_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} m^*(A_n)
$$

が成立する。 証明終

上の二つの定理より、カラテオドリ外測度から加算加法性をもつ測度による測度空間を構成する方法が見えてくる。

定義 3.3 集合 X 上にカラテオドリ外測度 m^* が定義されているとき、m^* について可測な集合全体のつくる加算加法族 $\mathfrak{B}$($\because$ 定理 3.5) に関して

$$
m(A) \equiv m^*(A) \text{ ただし } A \in \mathfrak{B}
$$

と定める。このとき、カラテオドリ外測度の定義と、定理 *3.6* より、集合関数 $m : \mathfrak{B} \to \boldsymbol{R} \cup \{\infty\}$ は、$\mathfrak{B}$ 上の加算加法性を持つ測度となる。これを、**カラテオドリ外測度の導く測度**といい、このときの $X(\mathfrak{B}, m)$ を、**カラテオドリ外測度の導く測度空間**という。 ◀

こうして、構成されたカラテオドリ外測度の導く測度に関しては、前章の議論がそのまま適用できるということになる。また、特に次のことが成り立っている。

定理 3.7 カラテオドリ外測度の導く測度空間は、完備である。すなわち、零集合の部分集合はすべて可測である。

(proof)

$X(\mathfrak{B}, m)$ を、カラテオドリ外測度 m^* の導く測度空間とする。任意の零集合 A をとる、すなわち、任意の $m(A) = 0$ となる可測集合 A をとる。このとき、その任意の $B \subset A$ をとると、

$$
0 \leq m^*(B) \leq m^*(A) = m(A) = 0 \quad \because \text{カラテオドリ外測度の単調性及び非負性}
$$

なので、$m^*(B) = 0$ である。したがって、任意の $E \subset X$ に関して、再び同様にして単調性より $m^*(E \cap B) = 0$ である。よって

$$
m^*(E \cap B) + m^*(E \cap B^c) = m^*(E \cap B^c) \leq m^*(E) \quad \because (E \cap B^c) \subset E \text{ より単調性}
$$

なので、定理 3.3 より、B は可測である。 証明終

3.3.1 カラテオドリ外測度関連の諸命題

補題 3.8 $A \supset B$ のとき $m^*(A) - m^*(B) \leq m^*(A - B)$

(proof)
条件より $A = (A - B) \cup B$ であるから

$$
\begin{aligned}
m^*(A) &= m^*((A - B) \cup B) \\
&\leq m^*(A - B) + m^*(B) \quad \because \text{劣加法性} \\
\therefore m^*(A) - m^*(B) &\leq m^*(A - B)
\end{aligned}
$$

$\boxed{\text{証明終}}$

補題 3.9 $A \supset B$ のとき 任意の E に関し $m^*(E \cap A - E \cap B) \leq m^*(A - B)$

(proof)
集合演算により

$$
\begin{aligned}
E \cap A - E \cap B &= (A \cap E) \cap (E \cap B)^c \\
&= A \cap E \cap (E^c \cup B^c) \quad \because \text{ド・モルガン則} \\
&= A \cap \{(E \cap E^c) \cup E \cap B^c) \quad \because \text{分配則} \\
&= A \cap (E \cap B^c) \quad \because E \cap E^c = \phi \\
&= E \cap (A - B) \\
&\subset (A - B)
\end{aligned}
$$

であるから、単調性より示される。 $\boxed{\text{証明終}}$

4　ユークリッド空間及びルベーグ外測度

$\boldsymbol{R^n}$ へカラテオドリ外測度を適用した、ルベーグ外測度について述べる。

4.1　ユークリッド空間

定義 4.1 $\boldsymbol{R}$ を実数体とする。$\boldsymbol{R^n}$ に

$$\boldsymbol{x} = (x_1, \cdots, x_n), \boldsymbol{y} = (y_1, \cdots, y_n) \in \boldsymbol{R^n} \quad ; \quad d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \sqrt{\sum_{k=1^n} (x_k - y_k)^2}$$

という距離を導入すると、$(\boldsymbol{R^n}, d)$ は距離空間[4]となる。これを**ユークリッド空間**と言い、d を**標準距離・ユークリッド距離**と称す。◂

距離空間であるので、定義 B.11 及び B.12 により**開集合・閉集合**を定義できる。他の距離空間・位相空間に関する事項も同様である。

4.1.1　積位相空間による開集合の定義

$\boldsymbol{R}$ 自身も距離空間なので、$\boldsymbol{R^n}$ の開集合族を $\boldsymbol{R}$ の積位相空間 (p148) から定義することもできる、すなわち

$$O = O_1 \times \cdots \times O_n \subset \boldsymbol{R^n} \text{が開集合} \Leftrightarrow O_1, \cdots, O_n \text{がすべて} \boldsymbol{R} \text{の開集合}$$

と定義すれば、これは定理 B.2 より位相空間の開集合族の条件を満たす。こうして得られた、積位相空間としての開集合は、ユークリッド距離による開集合と一見異なるが、実のところ、この二つは同値である。

定理 4.1 $O = O_1 \times \cdots \times O_n \subset \boldsymbol{R^n}$ が、積位相空間としての $\boldsymbol{R^n}$ の開集合であることと、ユークリッド距離空間としての開集合であることは、同値である。

(proof)

$O = O_1 \times \cdots \times O_n \subset \boldsymbol{R^n}$ が、積位相空間としての $\boldsymbol{R^n}$ の開集合であるとき。まず

$$O_i \text{が} \boldsymbol{R} \text{の開集合である} \quad \Leftrightarrow \quad \forall a \in O_i \text{に対して適当な正数} \epsilon \text{をとると} V_\epsilon(a) \subset O_i \text{となる}$$

である。ここでは $V_\epsilon(a) = \{x; |x - a| < \epsilon\}$ であるから、O が積位相空間としての $\boldsymbol{R^n}$ の開集合であるとは、

$\forall \boldsymbol{a} = (a_1, \cdots, a_n) \in O$ に対して適当な正数 $\epsilon_1, \cdots, \epsilon_n$ をとると
$\{(x_1, \cdots, x_n); |x_1 - a_1| < \epsilon_1, \cdots, |x_n - a_n| < \epsilon_n\} \subset O$ となる

ことである。

このとき、$\epsilon \equiv min(\epsilon_1, \cdots, \epsilon_n)$ とすると

$$\{(x_1, \cdots, x_n); |x_1 - a_1| < \epsilon, \cdots, |x_n - a_n| < \epsilon\} \subset O \tag{20}$$

である。$\forall \boldsymbol{y} \in V_\epsilon(\boldsymbol{a})$ について

$$|y_i - a_i|^2 \leq \sum_{k=1}^{n} |y_k - a_k|^2 = d(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{a})^2 < \epsilon^2$$

[4]付録 151p 参照。証明略。

よって $\boldsymbol{y} \in \{(x_1, \cdots, x_n); |x_1 - a_1| < \epsilon, \cdots, |x_n - a_n| < \epsilon\}$ であるからつまり

$$\begin{aligned} V_\epsilon(\boldsymbol{a}) &\subset \{(x_1, \cdots, x_n); |x_1 - a_1| < \epsilon, \cdots, |x_n - a_n| < \epsilon\} \\ &\subset O \quad \because (20) \end{aligned}$$

であり、任意の $\boldsymbol{a} \in O$ について適当な $\epsilon > 0$ をとると $V_\epsilon(\boldsymbol{a}) \subset O$ が成り立つので、O はユークリッド距離空間の意味でも開集合である。

逆に、O がユークリッド距離空間の意味で開集合であるとき。任意の $\boldsymbol{a} \in O$ について適当な $\epsilon > 0$ をとると $V_{\epsilon\sqrt{n}}(\boldsymbol{a}) \subset O$ が成り立つ。$\forall \boldsymbol{x} \in \{(x_1, \cdots, x_n); |x_1 - a_1| < \epsilon, \cdots, |x_n - a_n| < \epsilon\}$ について

$$\begin{aligned} d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a})^2 &= \sum_{i=1}^{n} |x_i - a_i|^2 \\ &< \sum_{i=1}^{n} \epsilon^2 = n\epsilon^2 \\ d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a}) &< \epsilon\sqrt{n} \end{aligned}$$

よって、$\boldsymbol{x} \in V_{\epsilon\sqrt{n}}$ である。つまり

$$\{(y_1, \cdots, y_n); |y_1 - a_1| < \epsilon, \cdots, |y_n - a_n| < \epsilon\} \subset V_{\epsilon\sqrt{n}} \subset O$$

であり、任意の $\boldsymbol{a} \in O$ について適当な $\epsilon > 0$ をとると $\{(y_1, \cdots, y_n); |y_1 - a_1| < \epsilon, \cdots, |y_n - a_n| < \epsilon\} \subset O$ が成り立つので、O は $\boldsymbol{R}$ の積位相空間の意味でも開集合である。 証明終

4.1.2 半開区間・開区間・閉区間

定義 4.2 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \boldsymbol{R}^n$ について

$$[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) \equiv [a_1, b_1) \times \cdots \times [a_n, b_n) = \{(x_1, \cdots, x_n); a_1 \leq x_1 < b_1, \cdots, a_n \leq x_n < b_n\}$$

と定義し、これを**半開区間**という。同様に**閉区間**もしくは $\boldsymbol{n}$ **次元長方形**を

$$[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}] \equiv [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n] = \{(x_1, \cdots, x_n); a_1 \leq x_1 \leq b_1, \cdots, a_n \leq x_n \leq b_n\}$$

と定義し、また**開区間**を

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) \equiv (a_1, b_1) \times \cdots \times (a_n, b_n) = \{(x_1, \cdots, x_n); a_1 < x_1 < b_1, \cdots, a_n < x_n < b_n\}$$

と定義する。また、これらについて、その大きさを

$$|[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})| \equiv |[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]| \equiv |(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})| \equiv |a_1 - b_1| \cdots |a_n - b_n|$$

と定義する。 ◂

定義 4.3 $\boldsymbol{R}^n$ の部分集合 A が**有界**であるとは、適切な閉区間 I をとったとき $A \subset I$ となることをいう。◂

定理 4.2 半開区間の共通部分は半開区間である。

(proof)
定義を考えると

$$\begin{aligned} &[b_1, a_1) \times \cdots \times [b_n, a_n) \cap [b'_1, a'_1) \times \cdots \times [b'_n, a'_n) \\ =&[min(b_1, b'_1) - max(a_1, a'_1)) \times \cdots \times [min(b_n, b'_n) - max(a_n, a'_n)) \end{aligned} \tag{21}$$

である。よって示された。 証明終

定理 4.3 半開区間 $I_1 \subset I_2$ について $|I_1| \leq |I_2|$

(proof)
各次元について $|b_i - a_i|$ を考えればよい。容易。詳細略。 $\boxed{\text{証明終}}$

補題 4.4 開区間は開集合である。

(proof)
$\boldsymbol{R}$ では、$(a,b) = V_{\frac{|a-b|}{2}}(\frac{a+b}{2})$ なので、補題 B.14 より、開集合である。

$\boldsymbol{R^n}$ の開区間は、$\boldsymbol{R}$ の開区間の直積なので、積位相空間の意味では開集合である。よって、定理 4.1 より、$\boldsymbol{R^n}$ の開区間は開集合である。 $\boxed{\text{証明終}}$

定理 4.5 半開区間 $A, B_1, \cdots, B_N$ について、$A \subset \displaystyle\bigcup_{n=1}^{N} B_n$ ならば

$$|A| \leq \sum_{n=1}^{N} |B_n|$$

となる。

(proof)
$A \subset \bigcup_{n=1}^{N} B_n$ より

$$A = A \cap \left(\bigcup_{n=1}^{N} B_n \right) = \bigcup_{n=1}^{N} (A \cap B_n) \quad \because \text{一般分配則}$$

定理 4.2 より $A \cap B_n$ は半開区間である。つまり、半開区間列 $(A \cap B_1), \cdots, (A \cap B_N)$ の和集合が半開区間 A となっている。半開区間列 $(A \cap B_1), \cdots, (A \cap B_N)$ の中で、共通部分があれば、各次元について、大きい部分・共通する部分・小さい部分に分割し、そこから $3^{(\text{次元数})}$ か $2^{(\text{次元数})}$ の半開区間を再構成して、共通する部分の半開区間を取り除く。分割される前の半開区間の大きさと、分割された半開区間の大きさの和は、実数の分配則より等しい。ここから共通部分が取り除かれた段階で、分割された半開区間の大きさの和が、もとより小さくなっている。これを繰り返すと、共通部分のない新しい半開区間列 $\{C_1, \cdots, C_M\}$ を作ることができ、そのつくり方より

$$\sum_{n=1}^{M} |C_n| \leq \sum_{n=1}^{N} |A \cap B_n|$$

である。また、共通部分がないので $\displaystyle\sum_{n=1}^{M} C_n = A$ であり、よって

$$|A| = \sum_{n=1}^{M} |C_n| \leq \sum_{n=1}^{N} |A \cap B_n|$$

である。また、$A \cap B_n \subset B_n$ から定理 4.3 より $|A \cap B_n| \leq |B_n|$ となる。よって

$$\sum_{n=1}^{N} |A \cap B_n| \leq \sum_{n=1}^{N} |B_n|$$

である。よって上の結果と合わせて

$$|A| \leq \sum_{n=1}^{N} |A \cap B_n| \leq \sum_{n=1}^{N} |B_n|$$

である。よって示された。 $\boxed{\text{証明終}}$

4.1.3 コンパクト

コンパクトの詳細については、付録 p149 を参照。ここでは、ユークリッド空間に関連するものを取り上げる。

定理 4.6 $\boldsymbol{R}$ の有界閉区間はコンパクトである。

(proof)
有界閉区間 $[a,b]$ と、その開被覆 $\{O_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ を考える。

$$A=\{x|[a,x] \text{ が } \{O_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma} \text{の有限部分被覆で覆われる }\}$$

とおく。開被覆 $\{O_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ の中には、必ず a を含むものがあるので、それを持ってくることによって $[a,a]=\{a\}$ は有限部分被覆で覆われる。すなわち $a\in A$ であり、A は空集合ではない。また、x が十分大きい時、$[a,x]$ は $[a,b]$ の開被覆では覆えない。よって、A は上に有界である。したがって、$\boldsymbol{R}$ は順序完備 (付録 p144) なので、上限 $\sup A$ が存在する。

ここで、$\sup A<b$ と仮定する。$a\le\sup A<b$ なので、$\sup A$ は、開被覆 $\{O_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ のある開集合 O' に含まれる。O' が開集合なので、適当な正数 ϵ をとると、$V_\epsilon(\sup A)\subset O'$ となる。よって、$\sup A<d<\sup A+\epsilon$ となる d を選んでおくと

$$(\sup A,d]\subset(\sup A-\epsilon,\sup A+\epsilon)=V_\epsilon(\sup A)\subset O'$$

である。A の定義より $[a,\sup A]$ は開被覆 $\{O_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ の有限部分被覆 $\{O_1,\cdots,O_s\}$ によって覆われる。このとき、

$$[a,d]=[a,\sup A]+(\sup A,d]\subset O_1\cup\cdots\cup O_s\cup O'$$

となる。すなわち $[a,d]$ が開被覆 $\{O_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ の有限部分被覆で覆われるということであり、これは $\sup A$ が A の上限であることに矛盾する。したがって、$b\le\sup A$ である。このとき $[a,b]\subset[a,\sup A]$ であり、$[a,\sup A]$ は $[a,b]$ の開被覆 $\{O_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ の有限部分被覆で覆われるので、$[a,b]$ もその有限部分被覆によって覆われる。よって、$[a,b]$ はコンパクトである。 証明終

定理 4.7 $\boldsymbol{R^n}$ の有界閉集合はコンパクトである。

(proof)
$\boldsymbol{R^n}$ の有界閉集合を F とおく。有界なので十分大きな閉区間 $[-\boldsymbol{a},\boldsymbol{a}]$ をとれば $F\subset[-\boldsymbol{a},\boldsymbol{a}]=[-a,a]^n$ となる。定理 4.6 より $[-a,a]$ はコンパクトであり、したがって、定理 B.4 より $[-\boldsymbol{a},\boldsymbol{a}]=[-a,a]^n$ もコンパクトである。F はその部分閉集合なので、定理 B.3 より F もコンパクトである。 証明終

逆も成り立つ。

定理 4.8 $\boldsymbol{R^n}$ のコンパクトな集合は、有界閉集合である。

(proof)
C を $\boldsymbol{R^n}$ のコンパクト集合とする。補題 4.4 より、開区間は開集合なので、$(-a,a)^n \quad (a=1,2,\cdots\to\infty)$ の全体は A の開被覆であるが、C はコンパクトなのでそのうちの有限個によって覆われる。この有限部分被覆のうち最大のものを $(-N,N)^n$ とすると、$C\subset(-N,N)^n\subset[-N-1,N+1]^n$ であるので、C は有界である。

また、任意の $x\in C^c$ をとり、x を中心とする閉球の補集合による集合族 $\{\overline{V}_{\frac{1}{m}}(x)^c\}_{m\in\boldsymbol{Z}}$ を考える。$\forall y\in C$ について、補題 B.5 より $d(x,y)>0$ である。よって $d(x,y)>\frac{1}{M}>0$ なる $M\in\boldsymbol{Z}$ をとれば

$$y\notin\overline{V}_{\frac{1}{M}}(x)\quad\Leftrightarrow\quad y\in\overline{V}_{\frac{1}{M}}(x)^c\quad\therefore C^c\subset\bigcup_{m\in\boldsymbol{Z}}\overline{V}_{\frac{1}{m}}(x)^c$$

となる。さらに、補題 B.15 より $\overline{V}_{\frac{1}{m}}(x)$ は閉集合なので、$\overline{V}_{\frac{1}{m}}(x)^c$ は開集合である。よって、$\{\overline{V}_{\frac{1}{m}}(x)^c\}_{m\in\boldsymbol{Z}}$ は C の開被覆である。C はコンパクトなので、この中から C の有限部分被覆をとることができる。そのうち最大のもの、すなわち m が最小のものを $\overline{V}_{\frac{1}{m'}}(x)^c$ とすれば、これは有限部分被覆の他のどの開集合も含むので

$$C \subset \overline{V}_{\frac{1}{m'}}(x)^c \quad \Leftrightarrow \quad \overline{V}_{\frac{1}{m'}}(x) \subset C^c$$

となる。すなわち、任意の $x \in C^c$ に関して、正数 $\frac{1}{m'}$ をとれば $\overline{V}_{\frac{1}{m'}}(x) \subset C^c$ となるので、C^c は開集合である。よって C は閉集合である。 $\boxed{\text{証明終}}$

補題 4.9 閉区間はコンパクトであり、有界閉集合である。

(proof)
閉区間を $[a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$ とする。定理 4.6 より、各 $[a_1, b_1], \cdots, [a_n, b_n]$ はコンパクトである。よって、定理 B.4 より閉区間 $[a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$ はコンパクトである。したがって、定理 4.8 よりこれは有界閉集合である。 $\boxed{\text{証明終}}$

4.2 被覆関係

補題 4.10 $\boldsymbol{R}^n$ の開集合 O は、高々加算個の、有理点を中心とする半径が有理数の開球の系列 $\{V_1, V_2, \cdots\}$ によって

$$O = \bigcup_{n=1}^{\infty} V_n$$

と表される。

(proof)
有理数及び有理点全体の集合が加算無限の濃度を持つことにより、有理点を中心とする半径が有理数の開球すべては、加算無限の濃度を持つ。したがって、そのうち O に含まれるもの全体の集合はその部分集合なので、高々加算集合である。よってこれを $\{V_1, V_2, \cdots, V_n. \cdots\}$ と表せる。

O は開集合なので、任意の $x \in O$ について、$V_{3\delta}(x) \subset O$ なる $\delta > 0$ が存在する。有理数は稠密なので、開球 $V_\delta(x)$ は有理点 x_r を含み、また、$\delta < r < 2\delta$ なる有理数 r が存在する。このとき

$$x \in V_r(x_r) \subset V_{\delta+r}(x) \subset V_{3\delta}(x) \subset O$$

なので、$V_r(x_r)$ は O に含まれる有理点を中心とする半径が有理数の開球である。つまり

$$x \in V_r(x_r) \in \{V_1, V_2, \cdots, V_n. \cdots\}$$

である。よって $x \in \displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} V_n$ であり、x は O に含まれる任意の点だったので

$$O \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} V_n$$

である。ところが、各 V_n については $V_n \subset O$ なので、当然

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} V_n \subset O$$

であるから、上とあわせて

$$O = \bigcup_{n=1}^{\infty} V_n$$

である。 $\boxed{\text{証明終}}$

定理 4.11 （リンデレーフの被覆定理）$\boldsymbol{R^n}$ の任意の集合 S は、開集合の系列 $\{O_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ によって

$$S \subset \bigcup_{\gamma\in\Gamma} O_\gamma$$

と覆われる、つまり開被覆 $\{O_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ をもつならば、そのうちの高々加算無限個の開集合 $\{O_n\}$ により

$$S \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} O_n$$

と覆われる。

(proof)

各 O_γ は、直前の補題により、O_γ に含まれる、高々加算個の、有理点を中心とする半径が有理数の開球の系列 $\{V_1^\gamma, V_2^\gamma, \cdots, V_{\gamma n}, \cdots\}$ によって

$$O_\gamma = \bigcup_{n=1}^{\infty} V_n^\gamma a$$

と表される。もとより、有理点を中心とする半径が有理数の開球は加算個しかないので、$\gamma \in \Gamma$ 全てと n が自然数全てをわたっても、異なるものは高々加算個である。これを改めて $\{V_1, V_2, \cdots, V_n, \cdots\}$ と表すことにすると

$$S \subset \bigcup_{\gamma\in\Gamma} O_\gamma = \bigcup_{n=1}^{\infty} V_n$$

が成立する。各 V_n は明らかに O_γ のどれかに含まれるので、V_n に対してそのひとつを O_n とすれば

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} V_n \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} O_n$$

なので、上とあわせて

$$S \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} V_n \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} O_n$$

となる。よって示された。 証明終

定理 4.12 任意の $\boldsymbol{R^n}$ の開集合は、加算個の半開区間の和集合として表せる。

(proof)

$\boldsymbol{R^n}$ の開集合を O とする。$\forall x \in O$ について、$V_\delta(x) \subset O$ となる $\delta > 0$ が存在する。このとき、x の各座標を x_i で表すとして

$$I_x \equiv \left[x_1 - \frac{\delta}{2\sqrt{n}}, x_1 + \frac{\delta}{2\sqrt{n}}\right) \times \cdots \times \left[x_n - \frac{2\delta}{\sqrt{n}}, x_n + \frac{2\delta}{\sqrt{n}}\right)$$

と半開区間（ここでは超立方体）I_x を定義すれば

$$I_x \subset_{\text{狭義で}} V_\delta(x) \subset O$$

である。これに対して

$$J_x \equiv \left(x_1 - \frac{2\delta}{\sqrt{n}}, x_1 + \frac{2\delta}{\sqrt{n}}\right) \times \cdots \times \left(x_n - \frac{2\delta}{\sqrt{n}}, x_n + \frac{2\delta}{\sqrt{n}}\right)$$

と定義すれば、開区間なので定理 4.4 より J_x は開集合であり、また $x \in J_x$ であるので

$$O \subset \bigcup_{x\in O} J_x$$

が成り立つ。よって、直前の、リンデレーフの被覆定理よりそのうちの高々加算個の系 $\{J_n\}$ によって

$$O \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} J_n$$

となる。J_n に対応する半開区間を I_n とすれば、$J_n \subset I_n$ なので

$$O \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} J_n \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$$

である。一方、$I_n \subset O$ なので

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} I_n \subset O$$

であり、上とあわせて

$$O = \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$$

である。よって示された。 証明終

4.3 ルベーグ外測度

定理 4.13 $\boldsymbol{R}^n$ の有界な集合は、加算個の半開区間 $\{I_1, \cdots, I_n, \cdots\}$ で覆うことができ、このとき

$$\sum_{n=1}^{\infty} |I_n|$$

の値は下に有界である。

(proof)

有界ならば十分大きい閉区間によって覆うことができ、それより少し大きい半開区間を取れば、半開区間ひとつで覆うことができるので、当然、加算個の半開区間を用いれば覆うことができる。

また、$0 \leq |I_n|$ なので $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} |I_n| \leq 0$ であり、確かに下に有界である。 証明終

定義 4.4 $\boldsymbol{R}^n$ の有界な集合 S に対し、上の定理より、S を加算個の半開区間で覆うことができるが、そのときの $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} |I_n|$ の値は、実数で下に有界なので、実数の順序完備性 *(命題 A.1)* より、$\{I_1, \cdots, I_n, \cdots\}$ をいろいろにとったときの下限をとることができる。この下限を**ルベーグ外測度**といい、$m^*(S)$ で表す。また、S が有界でないときには $m^*(S) = \infty$ とする。つまり、加算個の半開区間 $\{I_1, \cdots, I_n, \cdots\}$ をいろいろにとることによって、ルベーグ外測度を

$$m^*(S) = \begin{cases} \displaystyle\inf_{S \subset \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} I_n\right)} \sum_{n=1}^{\infty} |I_n| & S \text{ が有界であるとき} \\ \infty & S \text{ が有界でないとき} \end{cases}$$

と定義する。ルベーグ外測度は、下限の性質より一意に定まり、また、繰り返しになるが、実数の順序完備性より必ず定まる。◂

補題 4.14 $\boldsymbol{R}^n$ の有界な部分集合 S と任意の正数 ϵ に対して、下の条件を満たす加算個の半開区間列 $\{I_1, \cdots, I_n, \cdots\}$ が存在する。

1. $S \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$

2. $\sum_{n=1}^{\infty} |I_n| < m^*(S) + \epsilon$

(proof)

$\inf_{S \subset (\bigcup_{n=1}^{\infty} I_n)} \sum_{n=1}^{\infty} |I_n|$ なので、$m^*(S) < m^*(S) + \epsilon$ から下限の定義より $\sum_{n=1}^{\infty} |I_n| < m^*(S) + \epsilon$ となるような $S \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$ を満たす半開区間列 $\{I_1, \cdots, I_n, \cdots\}$ が存在する。よって示された。 証明終

定理 4.15 ルベーグ外測度は、カラテオドリ外測度である。

(proof)

カラテオドリ外測度の定義に当てはまるか調べればよい。

<u>非負性</u>　有界でないときは自明。有界なときは、各半開区間について、$|I_n| \geq 0$ より明らかである。

<u>単調性</u>　$A \subset B$ とする。有界でなければ明らか。有界なときを考える。補題 4.14 より、任意の $\epsilon > 0$ に対して

$$B \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} |I_n| < m^*(B) + \epsilon$$

なる加算個の半開区間列 $\{I_1, \cdots, I_n, \cdots\}$ が存在する。このとき $A \subset B \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$ であり、$\{I_1, \cdots, I_n, \cdots\}$ は A を覆う加算個の半開区間でもある。よって、ルベーグ外測度の下限性より

$$m^*(A) \leq \sum_{n=1}^{\infty} |I_n| < m^*(B) + \epsilon$$

となる。$\epsilon > 0$ は任意なので

$$m^*(A) \leq m^*(B)$$

が成立する。

<u>劣加法性</u>　集合列 $\{S_1, \cdots, S_n, \cdots\}$ を考える。有界でないものがあれば明らかである。集合列の全要素が有界であるときを考える。補題 4.14 より、任意の $\epsilon > 0$ と各 S_i に対し

$$S_i \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n^{(i)} \tag{22}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} |I_n^{(i)}| < m^*(S_i) + \frac{\epsilon}{2^i} \tag{23}$$

を満たす半開区間列 $\{I_1^{(i)}, \cdots, I_n^{(i)}, \cdots\}$ が存在する。このとき

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} S_i \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n^{(i)}$$

であるから、$\{I_n^{(i)}; i,n=1,2,\cdots\}$ は $\displaystyle\bigcup_{i=1}^{\infty} S_i$ の加算個の半開区間による覆い方のひとつである。よって、ルベーグ外測度の下限性より

$$\begin{aligned} m^*\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} S_i\right) &\leq \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} |I_n^{(i)}| \\ &< \sum_{i=1}^{\infty}\left\{m^*(S_i)+\frac{\epsilon}{2^i}\right\} \quad \because \text{式}\,(23) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} m^*(S_i)+\epsilon \end{aligned}$$

となる。$\epsilon > 0$ は任意なので

$$m^*\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} S_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} m^*(S_i)$$

が成立する。

$\underline{m^*(\phi)=0}$ 　$\phi=[0,0)^n$ であり、半開区間列 $\{[0,0)^n,[0,0)^n,\cdots\}$ を考えることにより、ルベーグ外測度の下限性から

$$0 \leq m^*(\phi) \leq \sum_{k=1}^{\infty} |[0,0)^n| = 0$$

$$\because m^*(\phi)=0$$

以上より、示された。 $\boxed{\text{証明終}}$

半開区間の外測度については、下のことを確認しておかないわけにはいかない。これが成立しなければ、ルベーグ外測度は通常の面積概念の拡張ではなく、別のものとなってしまう。自明のように一見見えるが、証明にはコンパクトの概念を要し、簡単ではない。

定理 4.16 半開区間 I に関して $m^*(I)=|I|$

(proof)
半開区間 I 自身が I を覆っており、半開区間列 $\{I,\phi,\phi,\cdots\}$ を考えることにより、ルベーグ外測度の下限性から

$$m^*(I) \leq |I|$$

となる。

また、補題 4.14 より、任意の $\epsilon > 0$ と I に対し

$$I \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} J_n \tag{24}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} |J_n| < m^*(I)+\frac{\epsilon}{3} \tag{25}$$

を満たす半開区間列 $\{J_1,\cdots,J_n,\cdots\}$ が存在する。ここで、各 J_i に対して、

$$|J_i| < |J_i''| < |J_i| + \frac{\epsilon}{3\cdot 2^i} \tag{26}$$

となるよう僅かに拡大した半開区間 J_i'' を作り、その境界の条件だけを変えて開区間にしたものを J_i' とする。このとき $J_i \subset J_i' \subset J''$ である。したがって

$$I \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} J_n \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} J_n'$$

である。

さらに、I に関し

$$|I''| < |I| < |I''| + \frac{\epsilon}{3} \tag{27}$$

となるよう僅かに縮小した半開区間 I'' を作り、その境界の条件だけを変えて閉区間にしたものを I' とする。このとき $I'' \subset I' \subset I$ である。したがって

$$I' \subset I \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} J'_n$$

である。ところで、補題 4.4 より開区間は開集合なので、$\{J'_1, \cdots, J'_n, \cdots\}$ は I' の開被覆である。また、補題 4.9 より閉区間はコンパクトなので、I' は $\{J'_1, \cdots, J'_n, \cdots\}$ の有限部分被覆によって覆われる[5]。したがって、十分大きい自然数 N をとれば

$$I'' \subset I' \subset \bigcup_{n=1}^{N} J'_n \subset \bigcup_{n=1}^{N} J''_n$$

となる。$I'', J''_1, \cdots, J''_N$ は半開区間なので、定理 4.5 より

$$\begin{aligned}
|I| - \frac{\epsilon}{3} \leq |I''| &\leq \sum_{n=1}^{N} |J''_n| \quad \because \text{式 (27)} \\
&\leq \sum_{n=1}^{\infty} |J''_n| < \sum_{n=1}^{\infty} \{|J_i| + \frac{\epsilon}{3 \cdot 2^i}\} = \sum_{n=1}^{\infty} |J_i| + \frac{\epsilon}{3} \quad \because \text{式 (26)} \\
&< m^*(I) + \frac{2\epsilon}{3} \quad \because \text{式 (25)} \\
|I| &< m^*(I) + \epsilon
\end{aligned}$$

$\epsilon > 0$ は任意なので

$$|I| \leq m^*(I)$$

となる。上の結果とあわせて

$$m^*(I) = |I|$$

である。 証明終

定理 4.17 閉区間または開区間 I について $m^*(I) = |I|$

(proof)

$\epsilon > 0$ の分だけ縮めた半開区間と拡大した半開区間をつくり、単調性を使って挟撃原理を用いればよい。詳細略。 証明終

定理 4.18 外測度は平行移動に対して不変である。すなわち、平行移動する変換を p で表せば

$$m^*(p(S)) = m^*(S)$$

となる。

---

[5] $I \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} J_n$ (24) が成立しても、有限個の N では $I \not\subset \bigcup_{n=1}^{N} J_n$ であれば、$I > \sum_{n=1}^{N} |J_n|$ となる可能性が残っており、したがって、$N \to \infty$ としても $I > \sum_{n=1}^{N} |J_n|$ となる可能性があるのである。この難しい論点を克服するために、コンパクト性 (有限被覆性) の概念が必要になったのである。

(proof)

$m^*(S)=\inf_{S\subset(\bigcup_{n=1}^\infty I_n)}\sum_{n=1}^\infty |I_n|$ だが、$S\subset(\bigcup_{n=1}^\infty I_n)$ と $p(S)\subset(\bigcup_{n=1}^\infty p(I_n))$ は同値であり、$|I_n|=|p(I_n)|$ なので

$$
\begin{aligned}
m^*(S) &= \inf_{S\subset(\bigcup_{n=1}^\infty I_n)}\sum_{n=1}^\infty |I_n| \\
&= \inf_{p(S)\subset(\bigcup_{n=1}^\infty p(I_n))}\sum_{n=1}^\infty |p(I_n)| \\
&= m^*(p(S))
\end{aligned}
$$

となる。 $\boxed{\text{証明終}}$

4.3.1 距離とルベーグ外測度

定義 4.5 距離関数は下に有界なので下限が存在する。そこで、距離空間の集合 A,B について

$$d(A,B)\equiv\inf_{a\in A,b\in B} d(a,b)$$

と定義する。◂

定理 4.19 $\boldsymbol{R^n}$ の部分集合 A,B について $d(A,B)>0$ ならば $m^*(A\cup B)=m^*(A)+m^*(B)$

(proof)

補題 4.14 より、任意の正数 ϵ に対して、下の条件を満たす加算個の半開区間列 $\{I_1,\cdots,I_n,\cdots\}$ が存在する。

$$A\cup B\subset\bigcup_{i=1}^\infty I_i \tag{28}$$

$$\sum_{i=1}^\infty |I_i|<m^*(A\cup B)+\epsilon \tag{29}$$

また、半開区間 $J_{s_1\cdots s_n}$ を

$$J_{s_1\cdots s_n}\equiv\left[\frac{d(A,B)}{2\sqrt{n}}s_1,\frac{d(A,B)}{2\sqrt{n}}(s_1+1)\right)\times\cdots\times\left[\frac{d(A,B)}{2\sqrt{n}}s_n,\frac{d(A,B)}{2\sqrt{n}}(s_n+1)\right)$$

と定義すると、$\boldsymbol{R^n}=\bigcup_{s_1,\cdots,s_n=-\infty}^\infty J_{s_1\cdots s_n}$ である。これと (28) より

$$A\cup B\subset\bigcup_{i=1}^\infty I_i=\bigcup_{[i=1]}^\infty\bigcup_{[s_1,\cdots,s_n=-\infty]}^\infty(I_i\cap J_{s_1\cdots s_n}) \tag{30}$$

である。また、定理 4.2 より $I_i\cap J_{s_1\cdots s_n}$ は半開区間であり、したがって、$\{I_i\cap J_{s_1\cdots s_n}(i,s_1,\cdots,s_n=0,\pm1,\pm2,\cdots)\}$ は、$\{I_1,\cdots,I_i,\cdots\}$ を細分化した半開区間の列である。また、$J_{s_1\cdots s_n}$ にそれぞれ共通点がないので、この半開区間はそれぞれ共通点がない。よって

$$|I_i|=\sum_{s_1,\cdots,s_n=-\infty}^\infty |I_i\cap J_{s_1\cdots s_n}| \tag{31}$$

である。

ここで、$(I_i \cap J_{s_1\cdots s_n}) \cap A \neq \phi$ かつ $(I_i \cap J_{s_1\cdots s_n}) \cap B \neq \phi$ となる半開区間 $I_i \cap J_{s_1\cdots s_n}$ があったとする。このとき、$I_i \cap J_{s_1\cdots s_n}$ と A, B の共通要素を a, b とすると

$$a \in A \qquad b \in B \qquad a, b \in J_{s_1\cdots s_n}$$

である。下限性より $d(A,B) \leq d(a,b)$ であるが、$a, b \in J_{s_1\cdots s_n}$ なので、$J_{s_1\cdots s_n}$ の定義より $d(a,b) < \sqrt{n}\frac{d(A,B)}{2\sqrt{n}} = \frac{d(A,B)}{2}$ であり、これは矛盾。よって、半開区間列 $\{I_i \cap J_{s_1\cdots s_n}(i, s_1, \cdots, s_n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)\}$ は、A と共通点のあるもの $\{I_i^A\}$・B と共通点のあるもの $\{I_i^B\}$・いずれとも共通点のないもの $\{I_i^O\}$ に分けられる。式 (30) より、$\forall x \in A$ について半開区間列 $\{I_i \cap J_{s_1\cdots s_n}(i, s_1, \cdots, s_n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)\}$ のどれかには含まれ、また、$\{I_i^B\}$ や $\{I_i^O\}$ には含まれないので、$x \in \bigcup\{I_i^A\}$ となる。つまり

$$A \subset \bigcup_{i=1}^{\text{高々加算個}} I_i^A$$

である。したがって、ルベーグ外測度の下限性より

$$m^*(A) \leq \sum_{i=1}^{\text{高々加算個}} |I_i^A|$$

である。同様にして

$$m^*(B) \leq \sum_{i=1}^{\text{高々加算個}} |I_i^B|$$

となる。よって

$$\begin{aligned}
m^*(A) + m^*(B) &\leq \sum_{i=1}^{\text{高々加算個}} |I_i^A| + \sum_{i=1}^{\text{高々加算個}} |I_i^B| \\
&\leq \sum_{i=1}^{\text{高々加算個}} |I_i^A| + \sum_{i=1}^{\text{高々加算個}} |I_i^B| + \sum_{i=1}^{\text{高々加算個}} |I_i^O| \\
&= \sum_{[i=1]}^{\infty} \sum_{[s_1,\cdots,s_n=-\infty]}^{\infty} |I_i \cap J_{s_1\cdots s_n}| \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} |I_i| \quad \because \text{式 (30)} \\
&< m^*(A \cup B) + \epsilon \quad \because \text{式 (29)}
\end{aligned}$$

ϵ は任意なので

$$m^*(A) + m^*(B) \leq m^*(A \cup B)$$

である。一方、外測度の有限劣加法性 (定理 3.1) より

$$m^*(A \cup B) \leq m^*(A) + m^*(B)$$

であるから、結局

$$m^*(A \cup B) = m^*(A) + m^*(B)$$

である。 $\boxed{\text{証明終}}$

補題 4.20 開集合もしくは閉集合 X について $d(X, X^c) > 0$

(proof)

片方を示せばもう一つはすぐに導けるので、X が開集合のときを考える。X は開集合なので $\forall x \in X$ につ

いて $V_\epsilon(x) \subset X$ となる正数 ϵ が存在する。このとき $X^c \subset V_\epsilon(x)^c$ であるから、$\forall y \in X^c$ について $y \in V_\epsilon(x)^c$ つまり

$$d(x, y) \geq \epsilon$$

である。ここで $d(X, X^c) = 0$ と仮定すると、下限の性質から $0 = d(X, X^c) < \epsilon$ より $d(a, b) < \epsilon$ となる $a \in X, b \in X^c$ が存在することになるが、これは上で述べたことに矛盾。よって、$d(X, X^c) > 0$ である。

証明終

5　ルベーグ測度空間

5.1　ルベーグ外測度からの測度空間の構成

定義 5.1 ルベーグ外測度は、$\boldsymbol{R^n}$ から $\boldsymbol{R}\cup\{\infty\}$ への集合関数であり、定理 *4.15* よりカラテオドリ外測度である。よって、カラテオドリ外測度の概念を用いて、測度空間を定義することができる。具体的には、定義 *3.3* のように、

1. 任意の集合 E に対し $m^*(E) = m^*(E\cap A) + m^*(E\cap A^c)$ を満たす集合 A として可測集合を定義して（可測集合族を $\mathfrak{B}$ と表す）

2. 可測集合に対してはルベーグ外測度を以て測度 m を定義することで

加算加法性を持つ完備な測度空間 $\boldsymbol{R^n}(\mathfrak{B}, m)$ を構成することができる。この測度空間を**ルベーグ測度空間**といい、このときの測度 m を**ルベーグ測度**という。ルベーグ測度空間は、有界ではない、すなわち、測度が無限大になることもある。◂

5.2　可測性

ルベーグ測度空間 $\boldsymbol{R^n}(\mathfrak{B}, m)$ において、集合 A が可測、すなわち測度を定めることができるということは

$$A \in \mathfrak{B} = \{X \in \boldsymbol{R^n} | \forall E \in \boldsymbol{R^n}, m^*(E) = m^*(E\cap X) + m^*(E\cap X^c)\}$$

ということである。ここで、可測集合族 $\mathfrak{B}$ はボレル集合体を成している。すなわち、$\phi, \boldsymbol{R^n}$ が可測であり、可測集合の補集合・和集合・共通部分が可測である。また、ルベーグ測度空間においては、定理 3.7 より完備性、すなわち、零集合の部分集合はすべて可測であるという性質が成り立っていることにも留意しておくべきである。

5.2.1　半開区間・開集合・閉集合の可測性

定理 5.1 半開区間は可測である。

(proof)
半開区間 $I = [b_1 - a_1)\times\cdots\times[b_n - a_n)$ とし、任意の $E\subset\boldsymbol{R^n}$ をとる。これに対し、任意の正数 ϵ をとり、I を縮めた

$$I_\epsilon = [b_1+\epsilon, a_1-\epsilon)\times\cdots\times[b_n+\epsilon, a_n-\epsilon)$$

を考える。定義より $d(I_\epsilon, I^c) > \epsilon$ であるから、集合の距離の定義の下限性より $d(E\cap I_\epsilon, E\cap I^c) \geq d(I_\epsilon, I^c) \geq \epsilon$ である。よって、定理 4.19 より

$$m^*((E\cap I_\epsilon)\cup(E\cap I^c)) = m^*(E\cap I_\epsilon) + m^*(E\cap I^c)$$

である。ところで、分配則より $(E\cap I_\epsilon)\cup(E\cap I^c) = E\cap(I_\epsilon\cup I^c)$ であり、$I\cup I^c = \boldsymbol{R^n}$ から

$$E = E\cap(I\cup I^c) \qquad I\cup I^c \supset I_\epsilon\cup I^c$$

であるから、補題 3.9 から

$$\begin{aligned} m^*(E - E\cap(I_\epsilon\cup I^c)) = m^*(E\cap(I\cup I^c) - E\cap(I_\epsilon\cup I^c)) &\leq m^*((I\cup I^c) - (I_\epsilon\cup I^c)) \\ 0 \leq m^*(E) - m^*(E\cap(I_\epsilon\cup I^c)) &\leq m^*(\boldsymbol{R^n} - (I_\epsilon\cup I^c)) \quad \because \text{補題 3.8} \\ &= m^*((I_\epsilon\cup I^c)^c) \\ &= m^*(I_\epsilon^c\cap I) \\ &= m^*(I - I_\epsilon) \end{aligned}$$

であり、$\epsilon \to 0$ ならば $m^*(I - I_\epsilon) \to 0$ であるから

$$m^*(E) - m^*(E \cap (I_\epsilon \cup I^c)) = m^*(E) - \{m^*(E \cap I_\epsilon) + m^*(E \cap I^c)\} = 0$$

である。また、$I \supset I_\epsilon$ なので、単調性及び補題 3.9 より

$$0 \le m^*(E \cap I) - m^*(E \cap I_\epsilon) \le m^*(I - I_\epsilon)$$

なので、$\epsilon \to 0$ ならば

$$m^*(E \cap I) - m^*(E \cap I_\epsilon) = 0$$

である。よって

$$m^*(E) = m^*(E \cap I_\epsilon) + m^*(E \cap I^c) = m^*(E \cap I) + m^*(E \cap I^c)$$

であり、I は可測の条件を満たしている。 証明終

定理 5.2 開集合・閉集合は可測である。

(proof)
定理 4.12 より、開集合は半開区間の加算個の和集合として表される。定理 5.1 より、半開区間は可測なので、その加算個の和集合である開集合は可測である。また、その補集合である閉集合は可測である。 証明終

5.3 ボレル集合族・ボレル集合

定義 5.2 集合 X とその部分集合族 $\beta \subset 2^X$ について、β を含む加算加法族の全体を $\{\mathfrak{B}_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$ として

$$\sigma[\beta] = \bigcap_{\gamma \in \Gamma} \mathfrak{B}_\gamma$$

と定義する。これは β を含む加算加法族で最小のものである。 ◂

特に重要なのは次の場合である。

定義 5.3 $\boldsymbol{R^n}$ の開集合族を $\mathfrak{O}$ として、$\boldsymbol{B}_n \equiv \sigma[\mathfrak{O}]$ を**ボレル集合族**[6]といい、ボレル集合族に含まれる集合を**ボレル集合**という。ボレル集合族も可算加法族である。◂

定理 5.3 $\boldsymbol{R^n}$ において、開集合・閉集合・半開区間・コンパクト集合・加算集合はボレル集合である。

(proof)
開集合・閉集合については、可算加法族の定義より明らか。半開区間 $I = [a_1, b_1) \times \cdots \times [a_n, b_n)$ は、閉区間 $J_m = \left[a_1, b_1 - \frac{1}{m}\right] \times \cdots \times \left[a_n, b_n - \frac{1}{m}\right]$ によって $I = \bigcup_{m=1}^{\infty} J_m$ と表わされるので、やはりボレル集合である。また、定理 4.8 よりコンパクト集合は有界閉集合なので、閉集合であることよりボレル集合である。加算集合は、閉集合である点の可算個の和集合なので、やはりボレル集合である。 証明終

ルベーグ測度空間の可算加法族を $\mathfrak{B}$ とすると、前節の定理より $\mathfrak{B}$ は開集合族を含む。したがって、ボレル集合族の定義より $\boldsymbol{B}_n \subset \mathfrak{B}$ である。これより、ルベーグ測度空間について次のことが成り立つ。

定理 5.4 ボレル集合は可測である。

[6]「ボレル」のつく用語には、定義の混乱が見られる。ここでは、可算加法族という意味でのボレル集合体と、ユークリッド空間における開集合族を含む最小の可算加法族としてのボレル集合族は区別しているが、異なる使い方がなされていることも多い。

定理 5.5 $\boldsymbol{R^n}$ の半開区間全体の成す集合族を $\boldsymbol{J}_n$ とすると $\sigma[\boldsymbol{J}_n] = \boldsymbol{B}_n$（ボレル集合族）となる。

(proof)
ボレル集合族 $\boldsymbol{B}_n$ は半開区間すべてを含むので、$\sigma[\boldsymbol{J}_n]$ の最小性より $\sigma[\boldsymbol{J}_n] \subset \boldsymbol{B}_n$ である。ところが、定理 4.12 より任意の開集合は半開区間の可算個の和集合として表せるので、$\sigma[\boldsymbol{J}_n]$ は開集合すべてを含む。したがって、$\boldsymbol{B}_n$ の最小性より $\boldsymbol{B}_n \subset \sigma[\boldsymbol{J}_n]$ である。 証明終

定理 5.6 $\underbrace{\boldsymbol{B}_1 \times \cdots \times \boldsymbol{B}_1}_{n\text{ 個}} \subset \boldsymbol{B}_d$ [7]

(proof)
$A \in \boldsymbol{B}_1$ に対して

$$\Gamma_k(A) \equiv \boldsymbol{R^{k-1}} \times A \times \boldsymbol{R^{n-k}}$$

とおくと、$\boldsymbol{B}_1$ が可算加法族であることより

$$\boldsymbol{B}^* \equiv \{A \in \boldsymbol{B}_1; \Gamma_k(A) \in \boldsymbol{B}_d\}$$

も可算加法族である。また、$A \in \boldsymbol{J}_1$ ならば $\Gamma_k(A) \in \boldsymbol{J}_n$ である。すなわち、$\boldsymbol{J}_1 \subset \boldsymbol{B}^*$ であるから、$\boldsymbol{B}_1 = \sigma[\boldsymbol{J}_1]$ の最小性より $\boldsymbol{B}_1 = \sigma[\boldsymbol{J}_1] \subset \boldsymbol{B}^*$ となる。これは、$A \in \boldsymbol{B}_1$ ならば $\Gamma_k(A) \in \boldsymbol{B}_d$ であることを表している。また、$A_1 \times \cdots \times A_n \in \underbrace{\boldsymbol{B}_1 \times \cdots \times \boldsymbol{B}_1}_{n\text{ 個}}$ について、$\Gamma_k(A_k) \in \boldsymbol{B}_n$ で $\boldsymbol{B}_n$ が可算加法族であることより

$$A_1 \times \cdots \times A_n = \Gamma_1(A_1) \cap \cdots \cap \Gamma_n(A_n) \in \boldsymbol{B}_d$$

であるから、$\underbrace{\boldsymbol{B}_1 \times \cdots \times \boldsymbol{B}_1}_{n\text{ 個}} \subset \boldsymbol{B}_d$ である。 証明終

定理 5.7 $\boldsymbol{B}_n = \sigma[\underbrace{\boldsymbol{B}_1 \times \cdots \times \boldsymbol{B}_1}_{n\text{ 個}}]$

(proof)
まず、半開区間の族 $\boldsymbol{J}_n$ について $\boldsymbol{J}_n \subset \underbrace{\boldsymbol{B}_1 \times \cdots \times \boldsymbol{B}_1}_{n\text{ 個}}$ なので、

$$\boldsymbol{B}_n = \sigma[\boldsymbol{J}_n] \subset \sigma[\underbrace{\boldsymbol{B}_1 \times \cdots \times \boldsymbol{B}_1}_{n\text{ 個}}]$$

である。また、直前の定理より $\underbrace{\boldsymbol{B}_1 \times \cdots \times \boldsymbol{B}_1}_{n\text{ 個}} \subset \boldsymbol{B}_d$ なので

$$\sigma[\underbrace{\boldsymbol{B}_1 \times \cdots \times \boldsymbol{B}_1}_{n\text{ 個}}] \subset \sigma[\boldsymbol{B}_d] = \boldsymbol{B}_d$$

である。上と合わせて示された。 証明終

5.4 G_δ 集合・F_σ 集合・ボレル集合

定義 5.4 加算個の開集合の共通部分[8]として表される集合を $\mathbf{G}_\delta$ **集合**といい、加算個の閉集合の和集合[9]として表される集合を $\mathbf{F}_\sigma$ **集合**という。同様に、加算個の共通部分・和集合として表される集合として、$G_{\delta\sigma}, F_{\sigma\delta}, \cdots$ と新しい種類の集合を定義できる。◂

[7] 集合族の直積は、矩形集合の族を表しているとする。すなわち、$\mathfrak{A} \times \mathfrak{B} = \{A \times B; A \in \mathfrak{A}, B \in \mathfrak{B}\}$ である。
[8] 開集合の加算個の共通部分は、必ずしも開集合ではない。
[9] 閉集合の加算個の和集合は、必ずしも開集合ではない。

明らかに次が成り立つ。

定理 5.8 G_δ 集合・F_σ 集合、以下これらの可算個の共通部分・和集合として表される集合は、ボレル集合であり、可測である。

定理 5.9 G_δ 集合の補集合は F_σ 集合であり、F_σ 集合の補集合は G_δ 集合である。

(proof)
ド・モルガン則と開集合の補集合が閉集合であり、閉集合の補集合が閉集合であることを考えればよい。
$\boxed{\text{証明終}}$

5.4.1 等測包

定義 5.5 $\boldsymbol{R^n}$ の部分集合 S に対して

$$S \subset G \tag{32}$$
$$m^*(S) = m(G) \tag{33}$$

となる G_δ 集合 G が存在するとき、G を S の**等測包**という。◂

定理 5.10 $\boldsymbol{R^n}$ の部分集合 S が有界ならば、任意の正数 ϵ に対して

$$S \subset O_\epsilon \tag{34}$$
$$m(O_\epsilon) < m^*(S) + \epsilon \tag{35}$$

となる開集合 O_ϵ が存在する。

(proof)
有界なので補題 4.14 より

$$S \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i \tag{36}$$
$$\sum_{i=1}^{\infty} |I_i| < m^*(S) + \frac{\epsilon}{2} \tag{37}$$

を満たす半開区間列 $\{I_1, \cdots, I_n, \cdots\}$ が存在する。このとき、$|I'_i| < |I_i| + \frac{\epsilon}{2^{i+1}}$ を満たす程度に I_i を拡大して開区間 I'_i をつくると、$I_i \subset I'_i$ から

$$S \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} I'_i$$

であり、また

$$\begin{aligned}
m^*(\bigcup_{i=1}^{\infty} I'_i) &\leq \sum_{i=1}^{\infty} m^*(I'_i) \quad \because \text{劣加法性} \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} |I'_i| \quad \because \text{定理 } 4.17 \\
&< \sum_{i=1}^{\infty} (|I_i| + \frac{\epsilon}{2^{i+1}}) \\
&< \sum_{i=1}^{\infty} |I_i| + \frac{\epsilon}{2} \\
&< m^*(S) + \epsilon \quad \because (37)
\end{aligned}$$

である。ここで、開区間は開集合であり、その加算個の和集合は開集合なので

$$O_\epsilon \equiv \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i'$$

とすると、O_ϵ は開集合で、既に述べたように定理の条件を満たしている。よって示された。 証明終

上の定理で、ϵ を小さくしていくことにより、ある集合の外測度に等しい測度を持つ可測集合を作ることができるが、その際、加算個の共通部分・和集合をとる集合の極限演算が必要なので、開集合そのままでは外測度と収束するところまで迫ることができず、その加算個の共通部分をとった G_δ 集合が現れてくる。ただし、下の証明では、確実に収束する集合列にするため、先に共通部分をとって減少列にしている。

定理 5.11 $\boldsymbol{R}^n$ の部分集合 S が有界ならば、等測包が存在する。

(proof)
定理 5.10 より

$$S \subset O_m \tag{38}$$

$$m(O_m) < m^*(S) + \frac{1}{m} \tag{39}$$

となる開集合列 $\{O_1, \cdots, O_m, \cdots\}$ が存在する。このとき

$$G_k \equiv \bigcap_{m=1}^{k} O_m$$

と定義すると、開集合列 $\{G_k\}$ は減少列なので、定理 1.5 より極限集合

$$\lim G_k = \bigcap_{n=k}^{\infty} G_k = G_\infty = \bigcap_{m=1}^{\infty} O_m$$

を以て収束する。また、$S \subset O_1, \cdots, O_k$ より $S \subset G_k$ であり、さらに定義より明らかに $G_k \subset O_k$ であるので

$$m^*(S) \leq m^*(G_k) = m(G_k) \leq m(O_k) < m^*(S) + \frac{1}{k}$$

であり

$$\lim_{k\to\infty} m(G_k) = m^*(S)$$

となる。ここで

$$m(G_1) = m(O_1) < m^*(S) + 1 < \infty$$

なので、単調極限定理 2.10 より

$$m\left(\lim G_k\right) = \lim_{k\to\infty} m(G_k) = m^*(S)$$

となる。このとき $\lim G_k = \displaystyle\bigcap_{m=1}^{\infty} O_m$ は G_δ 集合であり、$S \subset O_1, \cdots, O_m, \cdots$ から

$$S \subset \bigcap_{m=1}^{\infty} O_m$$

となるので、これは等測包の条件を満たしている。 証明終

これから、次の定理のように、可測集合の測度的な様相は G_δ 集合で十分に表せ、それ以上の複雑さは零集合に押し込めてしまえることが言える。

定理 5.12 有界な可測集合 S は、適当な G_δ 集合 G と、零集合 N により

$$S = G - N$$

と表される。

(proof)

定理 5.11 より等測包 G、すなわち

$$m(G) = m^*(S) = m(S) \qquad S \subset G$$

となる G_δ 集合 G が存在する。$N = G - S$ とすると補題 2.5 より

$$m(N) = m(G) - m(S) = 0$$

であり、N は零集合である。このとき、$N = G - S$ より

$$S = G - N$$

である。よって示された。 証明終

5.5 ルベーグ内測度

補題 5.13 $\boldsymbol{R}^n$ の有界な部分集合 S と $S \subset J_2 \subset J_1$ を満たす閉区間 J_1, J_2 について

$$|J_2| - m^*(J_2 - S) = |J_1| - m^*(J_1 - S)$$

となる。

(proof)

J_2 は閉区間なので、補題 4.20 と、集合の距離の下限性から

$$d(J_1 - J_2, J_2 - S) \geq d(J_2^c, J_2) > 0$$

である。このとき

$$\begin{aligned}
|J_1| - m^*(J_1 - S) &= |J_1| - m^*(\{(J_1 - J_2) + J_2\} \cap S^c) \\
&= |J_1| - m^*(\{(J_1 - J_2) \cap S^c\} \cup \{J_2 \cap S^c\}) \\
&= |J_1| - m^*(\{J_1 - J_2\} \cup \{J_2 \cap S^c\}) \quad \because J_1 - J_2 \subset S^c \\
&= |J_1| - m^*(J_1 - J_2) - m^*(J_2 \cap S^c) \quad \because d(J_1 - J_2, J_2 - S) > 0 \text{ より定理 4.19} \\
&= |J_1| - m(J_1 - J_2) - m^*(J_2 - S) \quad \because (J_1 - J_2) \text{ 可測} \\
&= |J_1| - m(J_1) + m(J_2) - m^*(J_2 - S) \quad \because \text{補題 2.5} \\
&= |J_1| - |J_1| + |J_2| - m^*(J_2 - S) \quad \because \text{補題 4.17} \\
&= |J_2| - m^*(J_2 - S)
\end{aligned}$$

である。よって示された。 証明終

定理 5.14 $\boldsymbol{R}^n$ の有界な部分集合 S と $S \subset J_1, J_2$ を満たす閉区間 J_1, J_2 について

$$|J_2| - m^*(J_2 - S) = |J_1| - m^*(J_1 - S)$$

となる。

(proof)
$S \subset J_1, J_2$ より $S \subset J_1 \cap J_2$ である。明らかに $J_1 \cap J_2 \subset J_1, J_2$ だから、補題 5.13 より

$$|J_1| - m^*(J_1 - S) = |J_1 \cap J_2| - m^*(J_1 \cap J_2 - S) = |J_2| - m^*(J_2 - S)$$

である。よって示された。 証明終

定義 5.6 $\boldsymbol{R^n}$ の有界な部分集合 S に対して、$S \subset J$ なる閉区間 J がとれるので、このとき

$$m_*(S) = |J| - m^*(J - S)$$

と定義する。定理 *5.14* よりこれは J のとり方によらない。この m_* を**ルベーグ内測度**という。◂

5.5.1 等測核

定義 5.7 $\boldsymbol{R^n}$ の部分集合 S に対して

$$K \subset S \tag{40}$$

$$m_*(S) = m(K) \tag{41}$$

となる F_σ 集合 K が存在するとき、K を S の**等測核**という。◂

定理 5.15 $\boldsymbol{R^n}$ の部分集合 S が有界ならば、等測核は存在する。

(proof)
S は有界なので、$S \subset J$ なる閉区間 J が存在する。このとき $J - S$ は明らかに有界なので、定理 5.11 より $J - S$ の等測包 G_{J-S} が存在する。これに関しては

$$J - S \subset G_{J-S} \qquad m^*(J - S) = m(G_{J-S})$$

となっている。等測包は G_δ 集合なので、定理 5.9 より、G_{J-S}^c は F_σ 集合である。また、定理 4.9 より閉区間 J は閉集合なので、一般化分配則を考えることにより、$J \cap G_{J-S}^c = J - G_{J-S}$ は F_σ 集合である。ここで、$K = J - G_{J-S}$ とおくと、補題 2.5 より

$$m(K) = m(J) - m(G_{J-S}) = |J| - m^*(J - S) = m_*(S)$$

であり、また $G_{J-S}^c \subset (J - S)^c$ より

$$J \cap G_{J-S}^c \subset J \cap (J - S)^c$$
$$J - G_{J-S} \subset J - (J - S)$$
$$K \subset S$$

である。つまりこのとき K は S の等測核である。 証明終

5.6 ルベーグ可測

定義 5.8 $\boldsymbol{R^n}$ の有界な部分集合 S について $m^*(S) = m_*(S)$ が成り立つとき、**ルベーグ可測**であるという。◂

定理 5.16 $\boldsymbol{R^n}$ の有界な部分集合 S について、S が可測であることと、S がルベーグ可測であることは同値である。

(proof)
S が可測なら、任意の $E \subset \boldsymbol{R^n}$ に対し

$$m^*(E \cap S) + m^*(E \cap S^c) = m(E)$$

である。よって、E として $S \subset J$ なる閉区間 J をとれば

$$\begin{aligned} m^*(S) + m^*(J - S) &= |J| \\ m^*(S) &= |J| - m^*(J - S) \\ &= m_*(S) \end{aligned}$$

となり、確かにルベーグ可測である。

逆に、ルベーグ可測であるとき。定理 5.11 及び 5.15 より、S の等測包 G と等測核 K をとると $K \subset S \subset G$ なので

$$S - K \subset G - K$$

である。ここで

$$\begin{aligned} m(G - K) &= m(G) - m(K) \quad \because \text{補題 2.5} \\ &= m^*(S) - m_*(S) \quad \because \text{等測包及び等測核の定義} \\ &= 0 \quad \because S \text{ はルベーグ可測} \end{aligned}$$

より、$G - K$ は零集合である。ルベーグ測度空間は、カラテオドリ外測度であるルベーグ外測度が導く測度空間なので、定理 3.7 より完備である。よって、$S - K$ は可測である。また等測核 K も可測なので

$$S = K \cup (S - K)$$

も可測である。 $\boxed{\text{証明終}}$

5.7 ルベーグ測度の性質

定理 5.17 A をルベーグ測度空間 $\boldsymbol{R^p}(\mathfrak{B}^p, m_p)$ の可測集合、B をルベーグ測度空間 $\boldsymbol{R^q}(\mathfrak{B}^q, m_q)$ の可測集合とし、$A \times B$ がルベーグ測度空間 $\boldsymbol{R^{p+q}}(\mathfrak{B}^{p+q}, m_{p+q})$ の可測集合であるとする。このとき $m_{p+q}(A \times B) = m_p(A)m_q(B)$ となる。

(proof)
外測度にして計算すると、$\{I_n^p\}$ を $\boldsymbol{R^p}$ の任意の半開区間の列、$\{I_m^q\}$ を $\boldsymbol{R^q}$ の任意の半開区間の列として

$$\begin{aligned} m_p(A)m_q(B) = m_p^*(A)m_q^*(B) &= \left(\inf_{\{A \subset \bigcup_n I_n^p\}} \sum_{n=1}^{\infty} |I_n^p| \right) \left(\inf_{\{B \subset \bigcup_n I_m^q\}} \sum_{m=1}^{\infty} |I_m^q| \right) \\ &= \inf_{\{A \subset \bigcup_n I_n^p\}} \inf_{\{B \subset \bigcup_n I_m^q\}} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} |I_n^p| \, |I_m^q| \\ &= \inf_{\{A \subset \bigcup_n I_n^p,\ B \subset \bigcup_n I_m^q\}} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} |I_n^p \times I_m^q| \end{aligned}$$

となる。矩形集合 $A \times B$ に対しては

$$A \subset \bigcup_n I_n^p,\ B \subset \bigcup_n I_m^q \quad \Leftrightarrow \quad A \times B \subset \bigcup_{m,n} I_n^p \times I_m^q$$

なので

$$
\begin{aligned}
m_p(A)m_q(B) = m_p^*(A)m_q^*(B) &= \inf_{\left\{A\times B\subset\bigcup_{m,n} I_n^p\times I_m^q\right\}} \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} |I_n^p \times I_m^q| \\
&= \inf_{\left\{A\times B\subset\bigcup_{m,n} I_n^p\times I_m^q\right\}} \sum_{n,m} |I_n^p \times I_m^q|
\end{aligned}
$$

であるが、$I_n^p \times I_m^q$ の形で、任意の $\boldsymbol{R^{p+q}}$ の半開区間を表せるので、添え字を付け替えて

$$
\begin{aligned}
m_p(A)m_q(B) = m_p^*(A)m_q^*(B) &= \inf_{\left\{A\times B\subset\bigcup_{k} I_k^{p+q}\right\}} \sum_{k} |I_k^{p+q}| \\
&= m_{p+q}^*(A\times B) \\
&= m_{p+q}(A\times B)
\end{aligned}
$$

となる。よって示された。 $\boxed{\text{証明終}}$

第 II 部
積分

6　可測関数

定義 6.1 測度空間 $X(\mathfrak{B}, m)$ について、$X \to \boldsymbol{R}$ の関数 f が、任意の実数 $\alpha < \beta$ に対して

$$\{x \in X; \alpha \le f(x) < \beta\} \in \mathfrak{B} \quad \text{すなわち可測}$$

となるとき、f を $(\mathfrak{B}-)$ **可測関数**という。また、この可測になる集合について

$$E\{\alpha \le f < \beta\} \equiv f^{-1}[\alpha, \beta) \equiv \{x \in X | \alpha \le f(x) < \beta\}$$

と表す。同様に $E\{f \le \beta\}, E\{f \le g\} = \{x \in X | f(x) \le g(x)\}, f^{-1}[\alpha, \beta], f^{-1}(\alpha, \beta), f^{-1}(\alpha, \beta]$ なども用いる。◂

可測関数は、積分を定義するための関数のクラスであるのみならず、測度論的確率論における確率変数でもあり、重要である。

6.1　同値な条件

定理 6.1 測度空間 $X(\mathfrak{B}, m)$ において、$f : X \to \boldsymbol{R}$ が可測であることと、任意の *1* 次元ボレル集合 $A(\in \boldsymbol{B}_1)$ について $f^{-1}(A) = \{x \in X; f(x) \in A\}$ が可測であることは、同値である。

(proof)

まず、任意の 1 次元ボレル集合 A について $f^{-1}(A)$ が可測であるとする。定理 5.3 より任意の半開区間 $[\alpha, \beta)$ はボレル集合つまり $[\alpha, \beta) \in \boldsymbol{B}_1$ なので、条件より、$\forall, \alpha, \beta$ について $f^{-1}[\alpha, \beta)$ は可測である。よって、f は可測関数である。

逆に、f が可測関数であるとき。1 次元ボレル集合 A のうち $f^{-1}(A)$ が可測となるものからなる集合族を $\mathfrak{B}_f$ とする、すなわち

$$\mathfrak{B}_f \equiv \{A \in \boldsymbol{B}_1; f^{-1}(A) \in \mathfrak{B}\} \subset \boldsymbol{B}_1 \subset 2^{\boldsymbol{R}}$$

である。関数の逆像については一般に

$$f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$$
$$f^{-1}(A^c) = \{f^{-1}(A)\}^c$$
$$f^{-1}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \bigcup_{n=1}^{\infty} f^{-1}(A_n)$$

が成り立つので、$\boldsymbol{B}_1, \mathfrak{B}$ が可算加法族であることを思い出せば、$\mathfrak{B}_f$ が可算加法族の条件を満たすことがわかる。すなわち、$\mathfrak{B}_f$ も可算加法族である。また、可測関数の定義より、任意の半開区間 $[\alpha, \beta)$ について $f^{-1}[\alpha, \beta) \in \mathfrak{B}$ であり、かつ、定理 5.3 より半開区間はボレル集合でもあるので、$[\alpha, \beta) \in \mathfrak{B}_f$ である。すなわち、$\mathfrak{B}_f$ は半開区間すべてを含む加算加法族である。$\boldsymbol{I}_1$ を一次元の半開区間すべてからなる集合族とすると、$\boldsymbol{I}_1$ を含む最小の可算加法族である $\sigma[\boldsymbol{I}_1]$ については $\sigma[\boldsymbol{I}_1] \subset \mathfrak{B}_f$ となる。ところが、定理 5.5 より

$$\boldsymbol{B}_1 = \sigma[\boldsymbol{I}_1] \subset \mathfrak{B}_f$$

であり、定義の $\mathfrak{B}_f \subset \boldsymbol{B}_1$ と合わせて、$\mathfrak{B}_f = \boldsymbol{B}_1$ である。よって、任意の 1 次元ボレル集合 A については $A \in \mathfrak{B}_f = \boldsymbol{B}_1$ であり、$f^{-1}(A) \in \mathfrak{B}$ が成り立つ。 $\boxed{\text{証明終}}$

定理 6.2 f が可測であることと、以下の集合が可測であることは同値である。α, β を任意の実数とする。

1. $f^{-1}(-\infty, \beta)$
2. $f^{-1}[\alpha, \infty)$
3. $f^{-1}(\alpha, \beta)$
4. $f^{-1}[\alpha, \beta]$
5. $f^{-1}(\alpha, \beta]$

(proof)
$f^{-1}[\alpha, \infty)$ についてのみ証明する。他は省略。同値な表現をさぐると

$$\begin{aligned} f^{-1}[\alpha, \infty) &= f^{-1}(\bigcup_{n=1}^{\infty}[\alpha, n)) \\ &= \bigcup_{n=1}^{\infty} f^{-1}[\alpha, n) \end{aligned}$$

である。$f^{-1}[\alpha, n)$ はすべて可測なので、$f^{-1}[\alpha, \infty)$ も可測である。逆も同様。 $\boxed{\text{証明終}}$

6.2 可測関数の性質

補題 6.3 $f(x), g(x)$ が可測なとき、$E\{f \leq g\}, E\{f < g\}, E\{f = g\}$ も可測である。

(proof)
各 x に対し、$f(x) < g(x)$ であることと $f(x) < q, q < g(x)$ となる $q \in \boldsymbol{Q}$ が存在することは同値である。よって

$$E\{f < g\} = \bigcup_{q \in \boldsymbol{Q}} (E\{f < q\} \cap E\{q < g\})$$

であり、有理数は加算個であり、定理 6.2 より $E\{f < q\}, E\{q < g\}$ は可測なので、$E\{f < g\}$ も可測である。また、これより $E\{f \leq g\} = E\{f > g\}^c$ も可測であり、$E\{f = g\} = E\{f \leq g\} - E\{f < g\}$ も可測である。 $\boxed{\text{証明終}}$

定理 6.4 $f(x), g(x)$ が可測なとき、$p(> 0), \alpha$ を実数として $\alpha f, f + g, |f|^p, fg$ も可測である。

(proof)
任意の $k \in \boldsymbol{R}$ について

$$E\{k \leq \alpha f\} = \begin{cases} E\{k/\alpha \leq f\} \\ E\{k/\alpha \geq f\} \end{cases}$$

であり、定理 6.2 よりこれは可測なので αf は可測である。

また、$k' \in \boldsymbol{R}$ について

$$E\{k \leq (k' - f)\} = E\{f \leq (k' - k)\}$$

より $(k'-f)$ が可測であり、よって

$$E\{k \leq f+g\} = E\{k-f \leq g\}$$

は、上の補題より可測である。

さらに

$$E\{k \leq |f|^p\} = E\{k^{\frac{1}{p}} \leq |f|\} = E\{k^{\frac{1}{p}} \leq f\} \cap E\{-k^{\frac{1}{p}} \geq f\}$$

より $|f|^p$ も可測であり

$$fg = \frac{1}{4}\{|f+g|^2 - |f+(-g)|^2\}$$

なので、上に証明したことより、fg も可測である。 $\boxed{\text{証明終}}$

定理 6.5 $f_n(n=1,\cdots,n,\cdots)$ が可測なとき、$\max(f_1,f_2), \min(f_1,f_2)$ $\sup_n f_n, \inf_n f_n$ $\overline{\lim_n} f_n, \underline{\lim_n} f_n$ も可測である。[10]

(proof)

任意の $k \in \boldsymbol{R}$ に関して

$$E\{k \leq \max(f_1,f_2)\} = E\{k \leq f_1\} \cap E\{k \leq f_1\}$$

より示される。$\min(f_1,f_2)$ も同様。

$\sup_n f_n(x) \geq k$ であることと、適当な n について $f_n(x) \geq k$ であることは同値。よって

$$E\{k \leq \sup_n f_n\} = \bigcup_n^\infty E\{k \leq f_n\}$$

であり、$\sup_n f_n$ は可測である。$\inf_n f_n$ も同様である。

また、$\overline{\lim_n} f_n(x) = \inf_n \sup_{n \leq m} f_n(x)$, $\underline{\lim_n} f_n(x) = \sup_n \inf_{n \leq m} f_n(x)$ より $\overline{\lim_n} f_n, \underline{\lim_n} f_n$ も可測である。 $\boxed{\text{証明終}}$

定理 6.6 $f_n(n=1,\cdots,n,\cdots)$ が可測で

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) \quad \text{各点収束}$$

ならば、f も可測である。

(proof)

各点で収束しているので、定理 A.7 より

$$f(x) = \overline{\lim_n} f_n(x) = \underline{\lim_n} f_n(x)$$

であり、上の定理より $\overline{\lim}_n f_n(x) = \underline{\lim}_n f_n(x)$ が可測なので、f も可測である。 $\boxed{\text{証明終}}$

[10] 関数列の上限・下限は、各点を固定して以て数列となすことで考える。上極限・下極限を考える時も同様である。

6.3 ボレル関数

定義 6.2 $\boldsymbol{B}^n$ を n 次元ボレル集合、m をルベーグ測度として、測度空間 $\boldsymbol{R}^n(\boldsymbol{B}^n, m)$ について、$\boldsymbol{B}^n$ 可測関数を（n 次元）**ボレル関数**ともいう。◂

定理 6.7 測度空間 $X(\mathfrak{B}, m)$ の可測関数 $f_1, \cdots, f_n$ とボレル関数 $g : \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}$ について、$\boldsymbol{f}(x) \equiv (f_1(x), \cdots, f_n(x))^T$ として合成関数 $g \circ \boldsymbol{f} : X \to \boldsymbol{R}$ もまた $\mathfrak{B}$ 可測関数となる。

(proof)

まず、$H \equiv \{A \in \boldsymbol{B}_n; \boldsymbol{f}^{-1}(A) \in \mathfrak{B}\}$ と定義すると、逆像の性質と $\boldsymbol{B}_n, \mathfrak{B}$ が加算加法族であることより H も加算加法族であるとわかる。また、任意の実数 $\alpha_i < \beta_i \ (i = 1, \cdots, n)$ に対して

$$\boldsymbol{f}^{-1}([\alpha_1, \beta_1) \times [\alpha_n, \beta_n)) = f_1^{-1}[\alpha_1, \beta_1) \cap \cdots \cap f_n^{-1}[\alpha_n, \beta_n) \in \mathfrak{B}$$

であるので、n 次元半開区間 $\boldsymbol{J}_n$ について $\boldsymbol{J}_n \subset H$ である。よって定理 5.5 より

$$\boldsymbol{B}_n = \sigma[\boldsymbol{J}_n] \subset \sigma[H] = H$$

である。ボレル関数の定義より任意の $A \in \boldsymbol{B}_n$ に対して $g^{-1}(A) \in \boldsymbol{B}_n \subset H$ である。すなわち、$\boldsymbol{f}^{-1}(g^{-1}(A)) \in \mathfrak{B}$ である。したがって定理 6.1 より

$$\boldsymbol{f}^{-1}(g^{-1}(A)) = (g \circ \boldsymbol{f})^{-1}(A) \in \mathfrak{B}$$

である。つまり、$g \circ \boldsymbol{f}$ は $\mathfrak{B}$ 可測関数である。 $\boxed{\text{証明終}}$

7　測度空間上の積分

7.1　測度空間上の積分の概要

　測度空間 $X(\mathfrak{B}, m)$ に対して

$$\text{関数}\ f : X \to \boldsymbol{R} \qquad (X \ni x \mapsto f(x) \in \boldsymbol{R})$$

が定義されているとする。通常、「関数」と言われて最も用いられているものは $X = \boldsymbol{R}(\boldsymbol{R^n})$ の場合のものである。この場合、通常良く知られている積分、すなわちリーマン積分は、関数に対して $\boldsymbol{R}$ の区間 $[a, b] \subset \boldsymbol{R}$ を決めると、それに対し定積分といわれている実数が与えられるというものであった。概念としては、すなわち

$$(\text{関数}\ f : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}, [a, b] \subset \boldsymbol{R}) \mapsto \int_a^b f(x)dx$$

である。

　測度空間に対しては、その測度を用いることにより、ある条件を満たす関数 (つまり可測関数)f と可測集合 $E \subset X$ を決めると、それに対しある実数を与えることができる。概念としては、すなわち

$$(\text{可測関数}\ f : X \to \boldsymbol{R}, \text{可測集合}\ E \subset X) \mapsto \int_E f(x)m(dx)$$

ということである。これが、測度空間上の定積分である。特に、同じ手法で、$X = \boldsymbol{R^n}$ に対し、ルベーグ測度を用いて構築された積分のことを、**ルベーグ積分**という。ここでは、まず、一般の測度空間上の積分について述べる。

7.2　単関数の積分

定義 7.1 全体集合 X とその部分集合 E に対して、$X \to \boldsymbol{R}$ の関数

$$I(x; E) \equiv \begin{cases} 1 & x \in E \\ 0 & x \notin E \end{cases}$$

を、E の**特性関数・定義関数**という。定義関数は $I(x \in E), I_E(x)$ などのようにも表す。◂

定義 7.2 測度空間 $X(\mathfrak{B}, m)$ とその有限な互いに共通点のない可測集合列 $E_1 + \cdots + E_n = X$ に対して、その定義関数の線形結合の形

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_j I(x; E_j)$$

で表される関数を**単関数**という。◂

定理 7.1 可測集合に対する定義関数及び単関数は可測である。

(proof)
　可測集合 E に対して、任意の $k \in \boldsymbol{R}$ について

$$E\{k \leq I(x; E)\} = E, \phi$$

より、可測集合に対する定義関数は可測である。また、その線形結合である単関数は、定理 6.4 より可測である。 証明終

　素朴な面積においては、長方形に面積を定め、そこから三角形・円を分割することによりそれらの面積を定めた。定義関数は、これから構築しようとする積分において、その長方形のような役割を果たす。すなわち、定義関数 $I(x; E)$ に対しては、その積分を測度を以て定め、これを橋頭堡にして、より一般の関数の積分を考えていこうというのである。

定義 7.3 定義関数・単関数の積分
測度空間 $X(\mathfrak{B}, m)$ について、可測集合 E の定義関数 $I(x;E)$ に関しては、$A \in \mathfrak{B}$ に対して積分範囲 $A(\subset X)$ による積分を

$$\int_A I(x;E)m(dx) = m(E \cap A)$$

と定義する。また、単関数

$$\varphi(x) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j I(x;E_j)$$

に関しては、可測集合の定義関数の積分の線形結合を以て、積分を

$$\int_A \varphi(x)m(dx) = \int_A \left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_j I(x;E_j) \right) m(dx) \equiv \sum_{j=1}^{n} \alpha_j m(E_j \cap A)$$

と定義する。◂

上の単関数に対する積分の定義では、注意しなければならないことがある。単関数

$$\varphi(x) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j I(x;E_j) \quad (X \equiv E_1 + \cdots + E_n)$$

について

$$\int_A \varphi(x)m(dx) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j m(E_j \cap A)$$

であるが、同じ単関数 $\varphi(x)$ が $X = F_1 + \cdots F_m$ なる $F_1, \cdots, F_m$ によって

$$\varphi(x) = \sum_{j=1}^{m} \beta_j I(x;F_j)$$

と表されることもありえるのである。このとき、同じ単関数に対する積分の値が、表現方法によって異なるのであれば、この定義は空虚なものになってしまうだろう。それがないことを保証するのが次の定理である。

定理 7.2 ある単関数 $\varphi(x)$ に対する積分の値は、単関数の表し方によらない。

(proof)

$$\varphi(x) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j I(x;E_j) = \sum_{i=1}^{N} \beta_j I(x;F_j) \qquad (X = E_1 + \cdots + E_n = F_1 + \cdots + F_N)$$

と表されていたとする。このとき $E_j \cap F_i \neq \phi$ ならば、$x_0 \in E_j \cap F_i$ をとったとき

$$\varphi(x_0) = \alpha_j = \beta_i$$

である。よって、積分の値について

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{n} \alpha_j m(E_j \cap A) &= \sum_{j=1}^{n} \alpha_j m\left(\left\{ \sum_{i=1}^{N} E_j \cap F_i \right\} \cap A \right) \\
&= \sum_{j=1}^{n} \alpha_j m\left(\sum_{i=1}^{N} E_j \cap F_i \cap A \right) \quad \because \text{一般分配則} \\
&= \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \sum_{i=1}^{N} m\left(E_j \cap F_i \cap A\right) \quad \because \text{有限加法性}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{N} \alpha_j m \left(E_j \cap F_i \cap A\right) \\
&= \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{N} \beta_i m \left(E_j \cap F_i \cap A\right) \quad \because m(E_j \cap F_i) \neq 0 \to E_j \cap F_i \neq \phi \to \alpha_j = \beta_i \\
&= \sum_{i=1}^{N} \beta_i m \left(\sum_{j=1}^{n} (E_j \cap F_i \cap A) \right) \quad \because \text{有限加法性} \\
&= \sum_{i=1}^{N} \beta_i m \left(\left\{ \sum_{j=1}^{n} (E_j \cap F_i) \right\} \cap A \right) \quad \because \text{一般分配則} \\
&= \sum_{i=1}^{N} \beta_i m \left(F_i \cap A\right)
\end{aligned}
$$

である。よって示された。 証明終

定理 7.3 φ_1, φ_2 が単関数なら $\alpha \in \boldsymbol{R}$ として $\alpha\varphi_1, \varphi_1+\varphi_2, \varphi_1\varphi_2, |\varphi_1|, \max(\varphi_1, \varphi_2), \min(\varphi_1, \varphi_2)$ も単関数である。

(proof)
容易。証明略。 証明終

7.2.1 部分測度空間における単関数の積分

A が測度空間 $X(\mathfrak{B}, m)$ の可測集合ならば、定理 2.1 の方法により、同じ測度による測度空間 $A(\mathfrak{B}', m)$ が自然に得られる。このとき、測度空間 X における単関数 $\varphi(x)$ の積分値

$$(X) \int_A \varphi(x) m(dx)$$

と、$\varphi(x)$ を A に制限した単関数 $\varphi_A(x)$ の測度空間 A における積分値

$$(A) \int_A \varphi_A(x) m(dx)$$

は等しいのかどうかという問題があるが、それに答えるのが次の定理である。

定理 7.4 測度空間 $X(\mathfrak{B}, m)$ において、A を可測集合とする。また、A から定理 *2.1* の方法により得られる測度空間を $A(\mathfrak{B}', m)$ とする。φ を X における単関数とし、その定義域を A に制限したものを $\varphi_A(x)$ とおく。このとき、測度空間 X における積分と測度空間 A における積分を $(X), (A)$ で区別するとして

$$(X) \int_A \varphi(x) m(dx) = (A) \int_A \varphi_A(x) m(dx)$$

(proof)

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i I(x; E_i) \quad (E_1 + \cdots + E_n = X)$$

とおく。このとき

$$\varphi_A(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i I(x; E_i \cap A) \quad (E_1 \cap A + \cdots E_n \cap A = A)$$

である。よって

$$\begin{aligned}(X)\int_A \varphi(x)m(dx) &= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i m(E_i \cap A) \\ &= (A)\int_A \varphi_A(x)m(dx)\end{aligned}$$

となる。 $\boxed{\text{証明終}}$

定理 7.5 $x \in A$ のとき単関数 φ_1, φ_2 について $\varphi_1(x) = \varphi_2(x)$ ならば

$$\int_A \varphi_1(x)m(dx) = \int_A \varphi_2(x)m(dx)$$

(proof)

直前の定理より A に測度空間を制限することによって示される。 $\boxed{\text{証明終}}$

定理 7.6 単関数 $\varphi_1(x) \leq \varphi_2(x) \quad (x \in A$ のとき$)$ について

$$\int_A \varphi_1(x)m(dx) \leq \int_A \varphi_2(x)m(dx)$$

(proof)

証明略。 $\boxed{\text{証明終}}$

7.2.2 単関数の積分の性質

定理 7.7 単関数 $\varphi(x)$ について

$$\int_{A+B} \varphi(x)m(dx) = \int_A \varphi(x)m(dx) + \int_B \varphi(x)m(dx)$$

(proof)

$\varphi(x) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j I(x; E_j)$ として

$$\begin{aligned}\int_{A+B} \varphi(x)m(dx) &= \sum_{j=1}^{n} \alpha_j m(E_j \cap (A+B)) \\ &= \sum_{j=1}^{n} \alpha_j m(\{E_j \cap A\} + \{E_j \cap B\}) \quad \because \text{分配則} \\ &= \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \{m(E_j \cap A) + m(E_j \cap B)\} \quad \because \text{有限加法性}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{j=1}^{n} \alpha_j m(E_j \cap A) + \sum_{j=1}^{n} \alpha_j m(E_j \cap B) \\
&= \int_A \varphi(x) m(dx) + \int_B \varphi(x) m(dx)
\end{aligned}
$$

$\boxed{\text{証明終}}$

定理 7.8 （単関数の積分の線形性）単関数 $\varphi(x), \psi(x)$ について、a, b を任意の実数として

$$
\int_A (a\varphi(x) + b\psi(x)) m(dx) = a \int_A \varphi(x) m(dx) + b \int_A \psi(x) m(dx)
$$

(proof)

$$
\begin{aligned}
\varphi(x) &= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i I(x; E_i) \\
\psi(x) &= \sum_{j=1}^{n} \beta_j I(x; F_j)
\end{aligned}
$$

とする。このとき

$$
\begin{aligned}
\int_A (a\varphi(x) + b\psi(x)) m(dx) &= \int_A (a \sum_{i=1}^{n} \alpha_i I(x; E_i) + b \sum_{j=1}^{n} \beta_j I(x; F_j)) m(dx) \\
&= \int_A \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} (a\alpha_i + b\beta_j) I(x; E_i \cap F_j) m(dx) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} (a\alpha_i + b\beta_j) M(E_i \cap F_j \cap A) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a\alpha_i M(E_i \cap F_j \cap A) + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} b\beta_j M(E_i \cap F_j \cap A) \\
&= a \sum_{i=1}^{n} \alpha_i M(E_i \cap A) + b \sum_{j=1}^{n} \beta_j M(F_j \cap A) \\
&= a \int_A \varphi(x) m(dx) + b \int_A \psi(x) m(dx)
\end{aligned}
$$

$\boxed{\text{証明終}}$

7.3 可測関数の積分

定義 7.4 測度空間 $X(\mathfrak{B}, m)$ において、非負可測関数 $f(x)$ の可測集合 E 上の積分を

$$
\int_E f(x) m(dx) = \sup_{0 \le \varphi(x) \le f(x)} \int_E \varphi(x) m(dx)
$$

と定義する。つまり、$0 \le \varphi(x) \le f(x)$ [11]を満たす単関数 $\varphi(x)$ をいろいろにとったとき、その単関数の積分の値は上に有界であり、順序完備性から上限が一意に定まるので、これを以て、一般の非負可測関数に対する積分を定義するということである。◂

[11]単関数に対して積分の値を定めるので、当然各点だけで考えても意味がなく、一様に成立している必要がある。

補題 7.9 非負可測関数 $f(x)$ と可測集合 E について $\int_E f(x)m(dx) \geq 0$

(proof)

$\psi(x) = 0 = 0 \times I(x;X)$ も $0 \leq \psi(x) \leq f(x)$ を満たす単関数である。よって

$$\begin{aligned}\int_E f(x)m(dx) &= \sup_{0\leq\varphi(x)\leq f(x)} \int_E \varphi(x)m(dx) \\ &\geq \int_E \psi(x)m(dx) \\ &= \int_E 0I(x;X) = 0\end{aligned}$$

証明終

定義 7.5 測度空間 $X(\mathfrak{B}, m)$ において、可測関数 $f(x)$ の可測集合 E 上の積分を

$$f^+(x) = \max(f(x), 0) \quad f^-(x) = \max(-f(x), 0)$$

によって $f(x) = f^+(x) - f^-(x)$ と二つの非負可測関数に分解し

$$\int_E f(x)m(dx) = \int_E f^+(x)m(dx) - \int_E f^-(x)m(dx)$$

と定義する。$f^+(x), f^-(x)$ に対する積分値がいずれも ∞ であるときは、積分は定義できない。片方でも有限ならば、**積分確定**であるという。いずれも有限ならば、**可積分**であるという。◂

この定義では、実際に計算する方法が見えてこない。より具体的に積分の値に迫る方法について 2 種類のアプローチをみていくことにする。

7.3.1 分点アプローチ

考えるべき単関数を絞っていく。

定義 7.6 X 上の関数 $f(x)$ と X の部分集合 E について

$$\underline{f(E)} \equiv \inf_{x\in E} f(x)$$

と定義する。◂

定理 7.10 単関数 $\varphi(x) = \sum_{j=1}^{N} \alpha_j I(x;E_j)$ について $\varphi(x) \leq f(x)$ の条件下では、単関数 $\varphi'(x) = \sum_{j=1}^{N} \underline{f(E_j)} I(x;E_j)$ とすると

$$\varphi(x) \leq \varphi'(x)$$

となり、また、単関数 $\varphi'(x)$ は $\varphi(x) \leq f(x)$ の条件を満たしている。

(proof)

ある $x \in X = E_1 + \cdots + E_N$ について成り立たなかったとする。x は可測集合列のどれかには含まれるので、$x \in E_J$ とすると

$$\alpha_J = f(x) > \underline{f(E_j)} = \inf_{x\in E_J} f(x)$$

である。このとき、下限の定義より $\alpha_J > f(x)$ となる $x \in E_j$ が存在する。ところが条件より

$$\varphi(x) = \alpha_J \leq f(x)$$

であり、矛盾する。よって $\forall x \in X$ について $\varphi(x) \leq \sum_{j=1}^{N} \underline{f(E_j)} I(x; E_j)$ である。また、下限性より、条件を満たしているのは明らか。 $\boxed{\text{証明終}}$

この定理と定理 7.6 より、$\varphi(x) \leq f(x)$ の条件下では、可測集合列 $E_1 + \cdots + E_N = X$ を定めれば、積分の値を与えるべき単関数の上限を考えるのには、係数は決まってしまうので、単関数も定まることになる。よって以降は、可測集合列 $E_1 + \cdots + E_N = X$ の分割方法のみが、積分の値を与える単関数を考えるのに要されることになる。

定理 7.11 単関数 $\varphi(x) = \sum_{j=1}^{N} \alpha_j I(x; E_j)$ と可測関数 $f(x)$ について、一般性を失わず

$$\underline{f(E_1)} \leq \underline{f(E_2)} \leq \cdots \leq \underline{f(E_N)}$$

が成り立っているとする。$\varphi(x) \leq f(x)$ の条件下では

$$\begin{aligned} F_j &\equiv f^{-1}[\underline{f(E_j)}, \underline{f(E_{j+1})}) &&= \{y | \underline{f(E_j)} \leq f(y) < \underline{f(E_{j+1})}\} \quad (j = 1, \cdots, N-1) \\ F_N &\equiv f^{-1}[\underline{f(E_n)}, \infty) &&= \{y | \underline{f(E_j)} \leq f(y)\} \end{aligned}$$

として

$$\varphi'(x) = \sum_{j=1}^{N} \underline{f(F_j)} I(x; F_j)$$

と単関数を定めると

$$\varphi(x) \leq \varphi'(x)$$

である。

(proof)

$\forall x \in E = E_1 + \cdots + E_N$ は可測集合列 $\{E_n\}$ のどれかには含まれる。それを $x \in E_j$ とすると $\underline{f(E_j)} \leq f(x)$ つまり

$$x \in \{y | \underline{f(E_j)} \leq f(y)\} = \sum_{i=j}^{N} F_i$$

である。よって、x は集合列 $\{F_j, \cdots, F_N\}$ のいずれかには含まれる。それを $x \in F_k (j \leq k)$ とすると、定義より $\underline{f(F_k)} = \underline{f(E_k)}$ なので

$$\varphi'(x) = \underline{f(F_k)} = \underline{f(E_k)} \geq \underline{f(E_j)} = \sum_{j=1}^{N} \underline{f(E_j)} I(x; E_j)$$

である。これと上の定理により

$$\varphi'(x) \geq \sum_{j=1}^{N} \underline{f(E_j)} I(x; E_j) \geq \varphi(x)$$

となる。よって示された。 $\boxed{\text{証明終}}$

よって、さらに、我々は値域の分点をとり、関数の値がその間に入る集合を取って構成される単関数のみ考えればよいということになる。より正確にこのことをまとめ直そう。

定理 7.12 非負有界可測関数 $f(x)$ について、その値域を含むように分点 $y_0, \cdots, y_N$ をいろいろにとるとき

$$\int_A f(x)m(dx) = \sup_{\{y_n\}} \sum_{i=0}^{N-1} y_i m\left(f^{-1}[y_i, y_{i+1}) \cap A\right)$$

(proof)
　積分の定義は

$$\int_A f(x)m(dx) = \sup_{0\le\varphi(x)\le f(x)} \int_E \varphi(x)m(dx)$$

である。上の定理及び定理 7.6 より、あらゆる $0 \le \varphi(x) \le f(x)$ なる単関数は、値域に分点をいろいろにとって作った単関数

$$\sum_{i=0}^{N-1} y_i I(x; f^{-1}[y_i, y_{i+1}))$$

のどれかよりも小さい。したがって、この値域 $\{f(x)|x \in A\}$ を含むように分点をいろいろにとって作った単関数を考慮すれば、上限を得るには十分である。また、可測関数に対しては、$f^{-1}[y_i, y_{i+1})$ は可測である。よって

$$\begin{aligned}\int_A f(x)m(dx) &= \sup_{0\le\varphi(x)\le f(x)} \int_A \varphi(x)m(dx)\\ &= \sup_{\{y_n\}} \sum_{i=0}^{N-1} y_i m\left(f^{-1}[y_i, y_{i+1}) \cap A\right)\end{aligned}$$

$\boxed{\text{証明終}}$

定理 7.13 非負有界可測関数 $f(x)$ と有界な可測積分区間 A について（$m(A) < +\infty$ の意味で有界)、値域を含むように分点 $y_0, \cdots, y_N$ をいろいろにとるとき

$$|\triangle| \equiv \max_{0\le i\le N-1} |y_{i+1} - y_i|$$

として

$$\int_A f(x)m(dx) = \lim_{|\triangle|\to 0} \sum_{i=0}^{N-1} y_i m\left(f^{-1}[y_i, y_{i+1}) \cap A\right)$$

となる。

(proof)
　まず

$$\begin{aligned}\underline{S}_{\{y_i\}} &\equiv \sum_{i=0}^{N-1} y_i m\left(f^{-1}[y_i, y_{i+1}) \cap A\right)\\ \overline{S}_{\{y_i\}} &\equiv \sum_{i=0}^{N-1} y_{i+1} m\left(f^{-1}[y_i, y_{i+1}) \cap A\right)\end{aligned}$$

と定義する。f の値域を含む任意の二つの分点 $\{y_i\}, \{y_i'\}$ と、その両方の分点からなるより詳細な分点 $\{Y_i\}$ を考える。$\underline{S}_{\{y_i\}}$ は、分点を詳細にすると、分点 $f^{-1}[y_i, y_{i+1})$ 内により大きい分点の値がかけられるものが出てくるので

$$\underline{S}_{\{y_i\}} = \sum_{i=0}^{N-1} y_i m\left(f^{-1}[y_i, y_{i+1}) \cap A\right) \le \sum_{i=0}^{N-1} Y_i m\left(f^{-1}[Y_i, Y_{i+1}) \cap A\right) = \underline{S}_{\{Y_i\}}$$

である。同様に考えると、$\overline{S}_{\{y_i\}}$ は詳細にすることでより小さい分点が入ることがあるので

$$\overline{S}_{\{Y_i\}} = \sum_{i=0}^{N-1} Y_{i+1} m\left(f^{-1}[Y_i, Y_{i+1}) \cap A\right) \leq \sum_{i=0}^{N-1} y'_{i+1} m\left(f^{-1}[y'_i, y'_{i+1}) \cap A\right) = \overline{S}_{\{y'_i\}}$$

となる。また $Y_i < Y_{i+1}$ なので

$$\underline{S}_{\{Y_i\}} = \sum_{i=0}^{N-1} Y_i m\left(f^{-1}[Y_i, Y_{i+1}) \cap A\right) \leq \sum_{i=0}^{N-1} Y_{i+1} m\left(f^{-1}[Y_i, Y_{i+1}) \cap A\right) = \overline{S}_{\{Y_i\}}$$

であるから、上の三式より

$$\underline{S}_{\{y_i\}} \leq \overline{S}_{\{y'_i\}}$$

である。二つの分点 $\{y_i\}, \{y'_i\}$ は任意だったので、$\{y_i\}$ をいろいろにとった上限に対しては

$$\underline{S}_{\{y'_i\}} \leq \sup_{\{y_i\}} \underline{S}_{\{y_i\}} \leq \overline{S}_{\{y'_i\}} \tag{42}$$

が成立する。このとき

$$\begin{aligned}
|\underline{S}_{\{y'_i\}} - \overline{S}_{\{y'_i\}}| &= |\sum_{i=0}^{N-1} (y_{i+1} - y_i) m\left(f^{-1}[y_i, y_{i+1}) \cap A\right)| \\
&\leq \sum_{i=0}^{N-1} |(y_{i+1} - y_i) m\left(f^{-1}[y_i, y_{i+1}) \cap A\right)| \\
&= \sum_{i=0}^{N-1} |(y_{i+1} - y_i)| m\left(f^{-1}[y_i, y_{i+1}) \cap A\right) \\
&\leq \sum_{i=0}^{N-1} |\triangle| m\left(f^{-1}[y_i, y_{i+1}) \cap A\right) \\
&= |\triangle| \sum_{i=0}^{N-1} m\left(f^{-1}[y_i, y_{i+1}) \cap A\right) \\
&\leq |\triangle| m\left(f^{-1}[y_1, y_N) \cap A\right) = |\triangle| m(A)
\end{aligned}$$

であり、A が有界ならば、$m\left(f^{-1}[y_1, y_N) \cap A\right)$ は有限なので

$$\lim_{|\triangle| \to 0} |\underline{S}_{\{y'_i\}} - \overline{S}_{\{y'_i\}}| = 0$$

となる。このとき式 (42) より

$$\lim_{|\triangle| \to 0} \sum_{i=0}^{N-1} y_i m\left(f^{-1}[y_i, y_{i+1}) \cap A\right) = \sup_{\{y_n\}} \sum_{i=0}^{N-1} y_i m\left(f^{-1}[y_i, y_{i+1}) \cap A\right) = \int_A f(x) m(dx) \qquad \because \text{定理 } 7.12$$

である。よって示された。 証明終

よって、我々は値域に分点をとり、その最大幅を狭めていくことで積分の値を求めうるところまで至った。この式の形を見れば、積分対象の関数が可測関数であるということも分かりやすいだろう。最後に、より一般的な形にしておく。

定理 7.14 有界可測関数 $f(x)$ と有界な積分区間 A について（$m(A) < +\infty$ の意味で有界）、値域を含むように分点 $y_0, \cdots, y_N$ をいろいろにとるとき

$$|\triangle| \equiv \max_{0 \leq i \leq N-1} |y_{i+1} - y_i|$$

として

$$\int_A f(x)m(dx) = \lim_{|\triangle|\to 0}\sum_{i=0}^{N-1} y_i m\left(f^{-1}[y_i, y_{i+1})\cap A\right)$$

となる。

(proof)

$f^+(x) = \max(f(x), 0)$　$f^-(x) = \max(-f(x), 0)$ によって $f(x) = f^+(x) - f^-(x)$ と二つの非負可測関数に分解する。このとき

$$\int_A f^+(x)m(dx) = \lim_{|\triangle|\to 0}\sum_{i=0}^{N-1} y_i m\left(f^{-1}[y_i, y_{i+1})\cap A\right)$$
$$\int_A f^-(x)m(dx) = \lim_{|\triangle|\to 0}\sum_{j=0}^{N-1} y'_j m\left(f^{-1}[y'_j, y'_{j+1})\cap A\right)$$

である。このとき、$f^{-1}[y'_M, y'_M]\cap A = \phi$ となるよう分点をとっておいても一般性を失わず

$$\sum_{i=0}^{N-1} y_i m\left(f^{-1}[y_i, y_{i+1})\cap A\right) - \sum_{j=0}^{M-1} y'_j m\left(f^{-1}[y'_j, y'_{j+1})\cap A\right)$$
$$= \sum_{i=0}^{N-1} y_i m\left(f^{-1}[y_i, y_{i+1})\cap A\right) + \sum_{j=0}^{M-1} (-y'_j) m\left(f^{-1}(-y'_{j+1}, -y'_j]\cap A\right)$$
$$= \sum_{i=0}^{N-1} y_i m\left(f^{-1}[y_i, y_{i+1})\cap A\right) + \sum_{j=0}^{M-1} (-y'_j) m\left(f^{-1}[-y'_{j+1}, -y'_j)\cap A\right)$$
$$+ \sum_{i=0}^{M-1} ('y_{i-1} -' y_i) m\left(f^{-1}[y'_i, y'_{i+1})\cap A\right) + y'_M m\left(f^{-1}[y'_M, y'_M]\cap A\right) - y'_0 m\left(f^{-1}[y'_0, y'_0]\cap A\right)$$
$$= \sum_{i=0}^{N-1} y_i m\left(f^{-1}[y_i, y_{i+1})\cap A\right) + \sum_{j=0}^{M-1} (-y'_j) m\left(f^{-1}[-y'_{j+1}, -y'_j)\cap A\right) + \sum_{i=0}^{M-1} ('y_{i-1} -' y_i) m\left(f^{-1}[y'_i, y'_{i+1})\cap A\right)$$
$$\because y'_0 = 0, f^{-1}[y'_M, y'_M]\cap A = \phi$$

であり、また

$$\begin{aligned}\lim_{|\triangle|\to 0}\sum_{i=0}^{M-1} ('y_{i-1} -' y_i) m\left(f^{-1}[y'_i, y'_{i+1})\cap A\right) &\leq \lim_{|\triangle|\to 0}\sum_{i=0}^{M-1} |\triangle| m\left(f^{-1}[y'_i, y'_{i+1})\cap A\right)\\ &\leq \lim_{|\triangle|\to 0}|\triangle|\sum_{i=0}^{M-1} m\left(f^{-1}[y'_i, y'_{i+1})\cap A\right)\\ &= \lim_{|\triangle|\to 0}|\triangle|\sum_{i=0}^{M-1} m\left(f^{-1}[y'_i, y'_{i+1})\cap A\right)\\ &\leq \lim_{|\triangle|\to 0}|\triangle| m\left(f^{-1}[y'_1, y'_N)\cap A\right)\\ &= 0 \quad \because f^{-1}[y'_1, y'_N) \text{ が有界}\end{aligned}$$

なので、$\{Y_i\} = \{\cdots, (-y'_j), \cdots, (-y'_1), y_1, \cdots, y_i, \cdots\}$ とすれば

$$\begin{aligned}
\int_A f(x)m(dx) &= \int_A f^+(x)m(dx) - \int_A f^-(x)m(dx) \\
&= \lim_{|\triangle|\to 0}\sum_{i=0}^{\infty} y_i m\left(f^{-1}[y_i, y_{i+1}) \cap A\right) - \lim_{|\triangle|\to 0}\sum_{j=0}^{\infty} y'_j m\left(f^{-1}[y'_j, y'_{j+1}) \cap A\right) \\
&= \lim_{|\triangle|\to 0}\sum_{i=0}^{N-1} y_i m\left(f^{-1}[y_i, y_{i+1}) \cap A\right) + \sum_{j=0}^{M-1} (-y'_j) m\left(f^{-1}[-y'_{j+1}, -y'_j) \cap A\right) \\
&= \lim_{|\triangle|\to 0}\left[\sum_{i=0}^{\infty} y_i m\left(f^{-1}[y_i, y_{i+1}) \cap A\right) + \sum_{j=0}^{\infty} (-y'_j) m\left(f^{-1}[-y'_{j+1}, -y'_j) \cap A\right)\right] \\
&= \lim_{|\triangle|\to 0}\sum_{i=0}^{\infty} Y_i m\left(f^{-1}[Y_i, Y_{i+1}) \cap A\right)
\end{aligned}$$

となる。よって示された。 $\boxed{\text{証明終}}$

7.3.2 近似単関数列アプローチ

定義 7.7 非負関数 $f(x)$ について

$$\varphi_1(x) \le \varphi_2(x) \le \cdots \le \varphi_n(x) \le \cdots \le f(x)$$

かつ

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_n(x) = f(x) \quad (\text{各点収束})$$

となる単関数の *[-k,k]*$\{\varphi_n\}$ が存在するとき、これを $f(x)$ の**近似単関数列**という。◂

可測関数とルベーグ積分の関係において、最も本質的なのは、次の定理である。

定理 7.15 非負可測関数 f は近似単関数列を持つ。

(proof)

自然数 n に対し

$$\begin{aligned}
A_k^{(n)} &= \left\{x; \frac{k}{2^n} \le f(x) < \frac{k+1}{2^n}\right\} \quad (k = 0, 1, 2, \cdots, n2^n - 1) \\
A^{(n)} &= \{x; n \le f(x)\}
\end{aligned}$$

とおく。可測関数の定義より、これらは可測集合であり、互いに共通点がなく、その直和は全測度空間 X を網羅する。このとき

$$\varphi_n(x) \equiv \sum_{k=0}^{n2^n-1} \frac{k}{2^n} I\left(x; A_k^{(n)}\right) + nI\left(x; A^{(n)}\right)$$

と定義すると、上に述べたことより、これは単関数である。$x \in A_k^{(n)}$ ならば $x \in A_{2k}^{(n+1)} or A_{2k+1}^{(n+1)}$ より

$$\varphi_{(n+1)}(x) = \frac{k}{2^n}, \frac{2k+1}{2^{n+1}} \ge \frac{k}{2^n} = \varphi_n(x)$$

であり、$x \in A^{(n)}$ ならば $x \in A^{(n+1)} or A_k^{(n+1)} \quad (2^n n \le k)$ より

$$\varphi_{(n+1)}(x) = n+1, \frac{k}{2^n} \ge n = \varphi_n(x)$$

となるので、あわせて、$\{\varphi_n(x)\}$ は [-k,k] を成している。また、$x \in A_k^{(n)}$ ならば $\dfrac{k}{2^n} \le f(x)$ なので

$$\varphi_n(x) = \frac{k}{2^n} \le f(x)$$

であり、$x \in A^{(n)}$ ならば $n \leq f(x)$ なので

$$\varphi_n(x) = n \leq f(x)$$

となり、あわせてすべての自然数 n に対して $\varphi_n(x) \leq f(x)$ である。

　さらに、$f(x) = \infty$ となる x については

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_n(x) = \lim_{n\to\infty} n = \infty$$

であり、そうでないところ、すなわち適当な自然数 N によって $f(x) < N$ となる x については、$N \leq n$ のとき、$x \in A_k^{(n)}$ となる $A_k^{(n)}$ が存在するので

$$|f(x) - \varphi_n(x)| < \left| \frac{k+1}{2^n} - \frac{k}{2^n} \right| = \frac{1}{2^n}$$

となり

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_n(x) = f(x)$$

である。あわせて、各点 $x \in X$ について

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_n(x) = f(x)$$

である。よって示された。 $\boxed{\text{証明終}}$

定理 7.16 関数 f が可測関数であることと、$\lim_{n\to\infty} \varphi_n(x) = f(x)$(各点収束)　$|\varphi_n(x)| \leq |f(x)|$ となるような単関数列 $\{\varphi_n(x)\}$ を持つことは同値である。

(proof)
　関数 f が可測であるとき。0 は明らかに可測関数なので、定理 6.5 より $f^+(x) = \max(f(x), 0) \geq 0, f^-(x) = \max(-f(x), 0) \geq 0$ は可測である。定理 7.15 より $f^+(x), f^-(x)$ は近似単関数列 $\{\varphi_n^+(x)\}, \{\varphi_n^-(x)\}$ を持つので、このとき $\varphi_n(x) = \varphi_n^+(x) - \varphi_n^-(x)$ とすれば

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_n(x) = \lim_{n\to\infty} \{\varphi_n^+(x) - \varphi_n^-(x)\} = f^+(x) - f^-(x) = f(x)$$

であり $|\varphi_n(x)| = |\varphi_n^+(x) - \varphi_n^-(x)|$ で

$$-f(x) = -(f^+(x) - f^-(x)) \leq -(\varphi_n^+(x) - \varphi_n^-(x)) \leq |\varphi_n^+(x) - \varphi_n^-(x)| \leq \varphi_n^+(x) - \varphi_n^-(x) \leq f^+(x) - f^-(x) = f(x)$$

つまり

$$|\varphi_n(x)| = |\varphi_n^+(x) - \varphi_n^-(x)| \leq |f(x)|$$

である。

　逆に関数 f が $\lim_{n\to\infty} \varphi_n(x) = f(x)$(各点収束)　$|\varphi_n(x)| \leq |f(x)|$ となるような単関数列 $\{\varphi_n(x)\}$ を持つとき。定理 7.1 より単関数は可測なので、定理 6.6 より f は可測である。 $\boxed{\text{証明終}}$

　同様にして、結局定理 7.15 は逆も成り立つ。

定理 7.17 関数 f が非負可測関数であることと、f が近似単関数列を持つことは同値である。

(proof)
　必要性は、定理 7.15 の内容である。十分性は、定理 6.6 より明らか。 $\boxed{\text{証明終}}$

定理 7.18 エゴロフの定理　有界な測度空間 $X(\mathfrak{B}, m)$ 上で定義された可測関数列 $\{f_n\}$ が f に各点収束しているとき、任意の正数 ϵ に対して、H^c 上で可測関数列 $\{f_n\}$ が f に一様収束しており、かつ $m(H) < \epsilon$ となるような可測集合 H がとれる。

(proof)

まず、定理 6.6 より、f は可測関数である。

$$A_n^r \equiv \bigcap_{k=n}^{\infty} \left\{ x; |f_k(x) - f(x)| < \frac{1}{2^r} \right\}$$

と定義する。f, f_k が可測関数なので、$f_k(x) - f(x)$ も可測関数である。よって

$$A_n^r = \{f_k(x) - f(x)\}^{-1} \left(-\frac{1}{2^r}, \frac{1}{2^r} \right)$$

は可測である。

$$x \in A_n^r \quad \leftrightarrow \quad k \geq n \text{ なる } k \text{ に対して } |f_k(x) - f(x)| < \frac{1}{2^r}$$

であり、ある r を固定したとき、A_n^r は [-k,k] であるから定理 1.4 より収束し、その極限集合は $k \to \infty$ のとき $f_k(x) = f(x)$ であることより

$$\lim_{n \to \infty} A_n^r = X$$

である。ここでは、有界な測度空間を考えているので、定理 2.14 も交えて

$$\lim_{n \to \infty} m(A_n^r) = m \left(\lim_{n \to \infty} A_n^r \right) = m(X) < \infty$$

となることより、任意の自然数 r に対してある自然数 $N(r)$ をとると

$$m(X) - m(A_{N(r)}^r) < \frac{1}{2^r} \tag{43}$$

である。ここで、自然数 l をとり

$$H \equiv \bigcup_{r=l+1}^{\infty} (A_{N(r)}^r)^c$$

とする。任意の自然数 r, n に対して A_n^r が可測なので、H も可測であり

$$\begin{aligned} m(H) &\leq \sum_{n=l+1}^{\infty} m((A_{N(r)}^r)^c) \quad \because \text{劣加法性} \\ &= \sum_{n=l+1}^{\infty} \{m(X) - m(A_{N(r)}^r)\} \\ &< \sum_{n=l+1}^{\infty} \frac{1}{2^r} = \frac{1}{2^l} \quad \because \text{式 (43)} \end{aligned}$$

である。よって $\epsilon > \frac{1}{2^l}$ となるように l をとっておけば

$$m(H) < \epsilon$$

である。また

$$H^c = \bigcap_{r=l+1}^{\infty} A_{N(r)}^r$$

であり

$$\begin{aligned} x \in H^c \quad &\leftrightarrow \quad \text{任意の } r(> l) \text{ について } x \in A_{N(r)}^r \\ &\leftrightarrow \quad \text{任意の } r(> l) \text{ について } k \geq N(r) \text{ ならば } |f_k(x) - f(x)| < \frac{1}{2^r} \end{aligned}$$

なので、H^c 上で f_k は f に一様収束している。よって示された。 $\boxed{\text{証明終}}$

エゴロフの定理は、有界な測度空間では、一様収束しない部分を無限に小さくできることを言っている。

次の定理は、可測関数の積分について**最も基本となる定理**の一つである。非負可測関数は必ず近似単関数列を持つが、その単関数列の極限として、可測関数の積分は求められるということが述べられている。これにより、積分の値に関する命題の証明の多くは、単関数の場合を証明することに帰着される。

定理 7.19 非負可測関数 f について、その近似単関数列を $\{\varphi_n(x)\}$ とするとき

$$\int_A f(x)m(dx) = \lim_{n\to\infty}\int_A \varphi_n(x)m(dx)$$

(proof)

任意の $0 \le \psi(x) \le f(x)$ なる単関数 $\psi(x)$ について。単関数の定義より $X = E'_1 + \cdots + E'_{s'}$ なる集合列 $\{E'_i\}$ によって

$$\psi(x) = \sum_{i=1}^{s'} \beta_i I(x; E'_i) \quad (\beta_i \ge 0)$$

と表わされる。$\alpha_i = 0$ なる E'_i を除いた集合列を $\{E_i\}$ とすると、$E^* \equiv E_1 + \cdots + E_s$ として、定義域を E^* に制限した

$$\psi(x) = \sum_{i=1}^{s} \alpha_i I(x; E_i) \quad (\alpha_i > 0)$$

という形でも表せる。このとき

$$(E^*)^c = \{x; \psi(x) = 0\}$$

である。

(i)$\int_A \psi(x)m(dx) < \infty$ のとき。

$$\begin{aligned}
\infty > \int_A \psi(x)m(dx) &= \sum_{i=1}^{s} \alpha_i m(E_i \cap A) \\
&\ge \left(\min_i \alpha_i\right) \sum_{i=1}^{s} m(E_i \cap A) \\
&= \left(\min_i \alpha_i\right) m(E^* \cap A) \quad \because \text{有限加法性} \\
\infty > m(E^* \cap A) &\quad \because \min_i \alpha_i > 0
\end{aligned}$$

定理 2.1 より $E^* \cap A$ は測度空間になるが、上の結果より、これは有界な測度空間である。よって、エゴロフの定理 7.18 より、測度空間 $E^* \cap A$ 上で、任意の $\epsilon > 0$ に対して $m(H) < \epsilon$ であり、かつ、H^c 上で φ_n が f に一様収束するような可測集合 H がとれる。ゆえに、任意の $\delta > 0$ に対し十分大きい N をとると

$$x \in H^c \text{ならば } f(x) - \delta < \varphi_N(x)$$

であり、$\psi(x) \le f(x)$ であることより

$$x \in H^c \text{ならば} \psi(x) < \varphi_N(x) + \delta$$

である。よって

$$
\begin{aligned}
\int_{E^*\cap A}\psi(x)m(dx) &= \int_H \psi(x)m(dx) + \int_{H^c}\psi(x)m(dx) \quad \because \text{定理 7.7}\\
&< \sum_{i=1}^{s}\alpha_i m(E_i\cap H) + \int_{H^c}(\varphi_N(x)+\delta)m(dx) \quad \because \text{定理 7.6}\\
&\le (\max_i \alpha_i)\sum_{i=1}^{s} m(E_i\cap H) + \int_{H^c}\varphi_N(x)m(dx) + \int_{H^c}\delta m(dx)\\
&= (\max_i \alpha_i)m(H) + \int_{H^c}\varphi_N(x)m(dx) + \int_{H^c}\delta I(x;H^c)m(dx) \quad \because \text{加算加法性}\\
&= (\max_i \alpha_i)\epsilon + \int_{H^c}\varphi_N(x)m(dx) + m(H^c)\delta\\
&\le (\max_i \alpha_i)\epsilon + \int_{A}\varphi_N(x)m(dx) + m(H^c)\delta\\
&\qquad \because H^c + (A\cap H) = A \text{ で } \int_{A\cap H}\varphi_N(x)m(dx) \ge 0 \text{ から定理 7.7 より}
\end{aligned}
$$

であるが、$\epsilon > 0, \delta > 0$ は任意なので

$$
\int_{E^*\cap A}\psi(x)m(dx) \le \int_A \varphi_N(x)m(dx)
$$

であり、また

$$
\begin{aligned}
\int_{(E^*)^c\cap A}\psi(x)m(dx) &= \sum_{i=1}^{s}\alpha_i m(E_i\cap (E^*)^c\cap A)\\
&= \sum_{i=1}^{s}\alpha_i m(\phi)\\
&= 0
\end{aligned}
$$

なので

$$
\begin{aligned}
\int_A \psi(x)m(dx) &= \int_{E^*\cap A}\psi(x)m(dx) + \int_{(E^*)^c\cap A}\psi(x)m(dx)\\
&= \int_{E^*\cap A}\psi(x)m(dx) + 0\\
&\le \int_A \varphi_N(x)m(dx)
\end{aligned}
$$

である。単関数 ψ は、$0 \le \psi(x) \le f(x)$ を満たすなかで任意のものをとってよかったので、その上限でも成立し、また、右辺において $N \to \infty$ とすると

$$
\int_A f(x)m(dx) = \sup_{0\le\psi(x)\le f(x)}\int_A \psi(x)m(dx) \le \lim_{n\to\infty}\int_A \varphi_n(x)m(dx)
$$

である。

(ii)$\int_A \psi(x)m(dx) = \infty$ のとき。明らかに $m(A\cap E^*) = \infty$ である。

$$
2\epsilon = \min_i \alpha_i > 0
$$

とし

$$
B_n \equiv \{x; \psi(x) > 0, \varphi_n(x) \ge \psi(x) - \epsilon\}
$$

とおく。$\{\varphi_n\}$ は [-k,k] なので、$\{B_n\}$ も [-k,k] である。また

$$\lim_{n\to\infty}\varphi_n(x)=f(x)\geq\psi(x)>\psi(x)-\epsilon$$

なので、[-k,k]$\{B_n\}$ は収束し

$$\lim B_n=\{x;\psi(x)>0\}=E^*$$

である。よって、定理 2.14 も交えて

$$\lim_{n\to\infty}m(A\cap B_n)=m(A\cap\lim B_n)=m(A\cap E^*)=\infty$$

である。

ところで、$x\in B_n$ ならば

$$\varphi_n(x)\geq\psi(x)-\epsilon\geq\epsilon\quad\because\psi(x)\geq 2\epsilon=\min_i\alpha_i$$

なので

$$\begin{aligned}\int_A\varphi_n(x)m(dx)&=\int_{A\cap B_n}\varphi_n(x)m(dx)+\int_{A\cap B_n^c}\varphi_n(x)m(dx)\quad\because\text{定理 7.7}\\&\geq\int_{A\cap B_n}\varphi_n(x)m(dx)\\&\geq\int_{A\cap B_n}\epsilon m(dx)\quad\because\text{定理 7.5}\\&=\epsilon m(A\cap B_n)\end{aligned}$$

であり、$n\to\infty$ とすると

$$\lim_{n\to\infty}\int_A\varphi_n(x)m(dx)\geq\lim_{n\to\infty}m(A\cap B_n)=\infty$$

である。よって、明らかに

$$\int_A f(x)m(dx)\leq\lim_{n\to\infty}\int_A\varphi_n(x)m(dx)=\infty$$

である。

(i)(ii) を合わせて、いずれにしても

$$\int_A f(x)m(dx)\leq\lim_{n\to\infty}\int_A\varphi_n(x)m(dx)$$

が成立する。また、近似単関数列の定義より十分大きな n に対しては $0\leq\varphi_n(x)\leq f(x)$ となるので

$$\int_A f(x)m(dx)=\sup_{0\leq\psi(x)\leq f(x)}\int_A\psi(x)m(dx)\geq\int_A\varphi_n(x)m(dx)$$

であり、$n\to\infty$ とすると

$$\int_A f(x)m(dx)\geq\lim_{n\to\infty}\int_A\varphi_n(x)m(dx)$$

となる。よって、上と合わせて

$$\int_A f(x)m(dx)=\lim_{n\to\infty}\int_A\varphi_n(x)m(dx)$$

である。 $\boxed{\text{証明終}}$

7.4 部分測度空間における積分

すでに単関数について示している、部分測度空間に関数を制限した上での積分に関する定理を、可測関数に拡張する。

定理 7.20 測度空間 $X(\mathfrak{B}, m)$ において、A を可測集合とする。また、A から定理 *2.1* の方法により得られる測度空間を $A(\mathfrak{B}', m)$ とする。f を X における可測関数とし、f の定義域を A に制限したものを $f_A(x)$ とおく。このとき、測度空間 X における積分と測度空間 A における積分を $(X), (A)$ で区別するとして

$$(X)\int_A f(x)m(dx) = (A)\int_A f_A(x)m(dx)$$

(proof)

まず、f が非負可測関数である場合を考える。このとき、定理 7.15 より f は近似単関数列 $\{\varphi_n(x)\}$ をもつ。また、この定義域を A に制限した $\{\varphi_n^A(x)\}$ は、あきらかに $f_A(x)$ の近似単関数列である。よって

$$\begin{aligned}(X)\int_A f(x)m(dx) &= (X)\lim_{n\to\infty}\int_A \varphi_n(x)m(dx) \quad \because \text{定理 } 7.19\\ &= (A)\lim_{n\to\infty}\int_A \varphi_n^A(x)m(dx) \quad \because \text{定理 } 7.4\\ &= (A)\int_A f_A(x)m(dx) \quad \because \text{定理 } 7.19\end{aligned}$$

である。

次は f を非負とは限らない可測関数とする。このとき f^+, f^- は非負可測関数であり

$$\begin{aligned}(X)\int_A f(x)m(dx) &= (X)\int_A f^+(x)m(dx) - (X)\int_A f^-(x)m(dx)\\ &= (A)\int_A f_A^+(x)m(dx) - (A)\int_A f_A^-(x)m(dx) \quad \because \text{上の場合}\\ &= (A)\int_A f_A(x)m(dx)\end{aligned}$$

となる。 証明終

この定理により、$(X), (A)$ といった区別をする必要はなく、積分範囲よりも大きい部分測度空間ならば、どれにでも制限して考えていいということが言える。

定理 7.21 可測関数 f, g 及び可測集合 A について、$x \in A$ のとき $f(x) = g(x)$ ならば

$$\int_A f(x)m(dx) = \int_A g(x)m(dx)$$

(proof)

直前の定理を用いれば容易。詳細略。 証明終

7.5 測度空間上の積分の主要な性質

7.5.1 予備命題

補題 7.22 可測関数 f 及び可測集合 A について

$$\int_A (-f(x))m(dx) = -\int_A f(x)m(dx)$$

(proof)

$(-f(x))^+ = f^-(x) \qquad (-f(x))^- = f^+(x)$ より示される。 $\boxed{\text{証明終}}$

定理 7.23 可測関数 $f(x)$ と可測集合 A, B について

$$\int_{A+B} f(x)m(dx) = \int_A f(x)m(dx) + \int_B f(x)m(dx)$$

(proof)

まず、f が非負可測関数である場合は、定理 7.7 および定理 7.15 より示される。

f が一般の可測関数である場合は、f^+, f^- が非負可測関数なので

$$\begin{aligned}
\int_{A+B} f(x)m(dx) &= \int_{A+B} f^+(x)m(dx) - \int_{A+B} f^-(x)m(dx) \\
&= \int_A f^+(x)m(dx) + \int_B f^+(x)m(dx) - \int_A f^-(x)m(dx) - \int_B f^-(x)m(dx) \\
&= \left(\int_A f^+(x)m(dx) - \int_A f^-(x)m(dx)\right) + \left(\int_B f^+(x)m(dx) - \int_B f^-(x)m(dx)\right) \\
&= \int_{A+B} f(x)m(dx) = \int_A f(x)m(dx) + \int_B f(x)m(dx)
\end{aligned}$$

である。 $\boxed{\text{証明終}}$

補題 7.24 非負可測関数 f, g と非負の実数 α, β 及び可測集合 A について

$$\int_A (\alpha f(x) + \beta g(x))m(dx) = \alpha \int_A f(x)m(dx) + \beta \int_A g(x)m(dx)$$

(proof)

定理 7.15 より f, g は近似単関数列 $\{\varphi_n(x)\}, \{\psi(x)\}$ をもつ。このとき、明らかに $\{\alpha\varphi_n(x) + \beta\psi_n(x)\}$ は $\alpha f(x) + \beta g(x)$ の近似単関数列である。よって、定理 7.19 より

$$\begin{aligned}
\int_A (\alpha f(x) + \beta g(x))m(dx) &= \lim_{n\to\infty} \int_A (\alpha\varphi_n(x) + \beta\psi_n(x))m(dx) \\
&= \lim_{n\to\infty} \alpha \int_A \varphi_n(x)m(dx) + \lim_{n\to\infty} \beta \int_A \psi_n(x)m(dx) \qquad \because \text{単関数の積分の線形性定理 7.8} \\
&= \alpha \int_A f(x)m(dx) + \beta \int_A g(x)m(dx)
\end{aligned}$$

$\boxed{\text{証明終}}$

補題 7.25 非負可測関数 f, g と可測集合 A について

$$\int_A (f(x)-g(x))m(dx) = \int_A f(x)m(dx) - \int_A g(x)m(dx)$$

(proof)

$A(f \geq g) \equiv A \cap \{x; f(x) \geq g(x)\}, A(f < g) \equiv A \cap \{x; f(x) < g(x)\}$ とおくと、$A(f \geq g) + A(f < g) = A$ であり、また $f(x) - g(x)$ は値域を $A(f \geq g)$ に制限すると非負可測関数であり、$g(x) - f(x)$ は値域を $A(f < g)$ に制限すると非負可測関数となる。よって

$$\begin{aligned}
\int_A (f(x)-g(x))m(dx) &= \int_{A(f\geq g)} (f(x)-g(x))m(dx) + \int_{A(f<g)} (f(x)-g(x))m(dx) \quad \because \text{定理 } 7.23 \\
&= \int_{A(f\geq g)} (f(x)-g(x))m(dx) + \int_{A(f\geq g)} g(x)m(dx) - \int_{A(f\geq g)} g(x)m(dx) \\
&\quad - \left\{ \int_{A(f<g)} (g(x)-f(x))m(dx) + \int_{A(f<g)} f(x)m(dx) \right\} + \int_{A(f<g)} f(x)m(dx) \quad \because \text{補題 } 7.22 \\
&= \int_{A(f\geq g)} (f(x)-g(x)+g(x))m(dx) - \int_{A(f\geq g)} g(x)m(dx) \\
&\quad - \left\{ \int_{A(f<g)} (g(x)-f(x)+f(x))m(dx) \right\} + \int_{A(f<g)} f(x)m(dx) \quad \because \text{補題 } 7.24 \\
&= \int_{A(f\geq g)} f(x)m(dx) - \int_{A(f\geq g)} g(x)m(dx) \\
&\quad - \int_{A(f<g)} g(x)m(dx) + \int_{A(f<g)} f(x)m(dx) \\
&= \int_A f(x)m(dx) - \int_A g(x)m(dx) \quad \because \text{定理 } 7.23
\end{aligned}$$

となる。 証明終

7.5.2 積分の線形性

定理 7.26 （可測関数の積分の線形性 1）可測関数 f と任意の実数 k 及び可測集合 A について

$$\int_A kf(x)m(dx) = k\int_A f(x)m(dx)$$

(proof)

(i)$k \geq 0$ のとき。

$$\begin{aligned}
\int_A kf(x)m(dx) &= \int_A (kf)^+(x)m(dx) - \int_A (kf)^-(x)m(dx) \\
&= \int_A kf^+(x)m(dx) - \int_A kf^-(x)m(dx) \\
&= k\left\{ \int_A f^+(x)m(dx) - \int_A f^-(x)m(dx) \right\} \quad \because \text{直前の補題} \\
&= k\int_A f(x)m(dx)
\end{aligned}$$

(ii)$k<0$ のとき。

$$
\begin{aligned}
\int_A kf(x)m(dx) &= \int_A -(-k)f(x)m(dx) \\
&= -\int_A (-k)f(x)m(dx) \quad \because \text{補題 } 7.22 \\
&= -(-k)\int_A f(x)m(dx) \quad \because (i) \text{ の場合} \\
&= k\int_A f(x)m(dx)
\end{aligned}
$$

証明終

定理 7.27 （可測関数の積分の線形性 2）可測関数 f,g 及び可測集合 A について

$$
\int_A (f(x)+g(x))m(dx) = \int_A f(x)m(dx) + \int_A g(x)m(dx)
$$

(proof)

$$
\begin{aligned}
\int_A (f(x)+g(x))m(dx) &= \int_A \{(f^+(x)+g^+(x)) - (f^-(x)+g^-(x))\}m(dx) \\
&= \int_A (f^+(x)+g^+(x))m(dx) - \int_A (f^-(x)+g^-(x))m(dx) \\
&\qquad \because f^+(x)+g^+(x), f^{(}x)+g^-(x) \text{ が非負可測関数であることから補題 } 7.25 \\
&= \int_A f^+(x)m(dx) + \int_A g^+(x)m(dx) - \int_A f^-(x)m(dx) - \int_A g^-(x)m(dx) \quad \because \text{補題 } 7.24 \\
&= \int_A f^+(x)m(dx) - \int_A f^-(x)m(dx) + \int_A g^+(x)m(dx) - \int_A g^-(x)m(dx) \\
&= \int_A f(x)m(dx) + \int_A g(x)m(dx)
\end{aligned}
$$

証明終

この二つの定理により、以後、積分の線形性を安心して用いることができる。下の定理は、不等式に関するものだが、線形性も含めて、以後、明示せずに使うこともあるだろう。

定理 7.28 可測関数 f,g について $f(x)\le g(x) \quad (x\in A$ のとき$)$ ならば

$$
\int_A f(x)m(dx) \le \int_A g(x)m(dx)
$$

(proof)

条件より、定義域を A に制限すれば、A 上で $g(x)-f(x)$ は非負可測関数である。よって、定理 7.20 及び補題 7.9 より

$$
\begin{aligned}
0 &\le \int_A (g(x)-f(x))m(dx) \\
&= \int_A g(x)m(dx) - \int_A f(x)m(dx) \quad \because \text{線形性} \\
\int_A f(x)m(dx) &\le \int_A g(x)m(dx)
\end{aligned}
$$

である。 証明終

7.5.3　極限関係

線形性から、有限の N に対して

$$\int_A \sum_{n=1}^{N} f_n(x)m(dx) = \sum_{n=1}^{N} \int_A f_n(x)m(dx)$$

は導かれる。しかし、$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ が成立しても、極限と積分の交換、つまり

$$\lim_{N\to\infty} \int_A \sum_{n=1}^{N} f_n(x)m(dx) = \int_A \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} f_n(x)m(dx)$$

が成立するかどうかはまだ示されていない[12]ので、無限和については、別に示す必要がある。

定理 7.29（無限和と積分の交換）非負可測関数列 $\{f_n\}$ について $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ ならば

$$\int_A f(x)m(dx) = \int_A \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)m(dx) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_A f_n(x)m(dx)$$

(proof)

定理 7.15 より、可測関数は近似単関数列を持つので、f_k の近似単関数列を $\{\varphi_n^k\}$ とする。このとき、近似単関数列の単調性より

$$\begin{aligned}
\varphi_n^k(x) &\le \varphi_{n+1}^k(x) \\
\therefore \sum_{k=1}^{n} \varphi_n^k(x) &\le \sum_{k=1}^{n} \varphi_{n+1}^k(x) \\
&\le \sum_{k=1}^{n+1} \varphi_{n+1}^k(x)
\end{aligned}$$

である。よって

$$\psi_n(x) \equiv \sum_{k=1}^{n} \varphi_n^k(x)$$

とおくと

$$\psi_n(x) \le \psi_{n+1}(x)$$

が成り立つ。あとは $n\to\infty$ のとき $\psi_n(x)$ が $f(x)$ に収束すれば、$\{\psi_n\}$ は f の近似単関数列ということになる。ここで、任意の n について

$$\begin{aligned}
f(x) &= \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) \\
&\ge \sum_{k=1}^{n} f_k(x) \quad \because f_k(x) \ge 0 \\
&\ge \sum_{k=1}^{n} \varphi_n^k(x) \quad \because \text{近似単関数列の定義より} \varphi_n^k(x) \le f_k(x) \\
&= \psi_n(x)
\end{aligned} \tag{44}$$

[12] 一定条件下での極限と積分の交換可能性を示すことが、測度空間の積分を導入する理由のひとつである。リーマン積分でも証明できるが、ややこしい。

であり、n は任意なので

$$f(x) \geq \lim_{n\to\infty} \psi_n(x)$$

が成立する。また、任意の自然数 N に対して

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \psi_n(x) &= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \varphi_n^k(x) \\
&\geq \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{N} \varphi_n^k(x) \\
&= \sum_{k=1}^{N} \lim_{n\to\infty} \varphi_n^k(x) \\
&= \sum_{k=1}^{N} f_k(x)
\end{aligned}$$

が成立するが、N は任意なので $N \to \infty$ とすれば

$$\lim_{n\to\infty} \psi_n(x) \geq \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) = f(x)$$

であり、前の式とあわせて

$$\lim_{n\to\infty} \psi_n(x) = f(x)$$

となる。よって、$\{\psi_n\}$ が f の近似単関数列であることが示された。ゆえに

$$\begin{aligned}
\int_A f(x)m(dx) &= \lim_{n\to\infty} \int_A \psi_n(x)m(dx) \quad \because \text{定理 } 7.19 \\
&= \lim_{n\to\infty} \int_A \sum_{k=1}^{n} \varphi_n^k(x)m(dx) \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \int_A \varphi_n^k(x)m(dx) \quad \because \text{ここではまだ極限をとっていないので線形性より} \\
&\leq \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \int_A f_k(x)m(dx) \quad \because \text{近似単関数列の定義より}\varphi_n^k(x) \leq f_k(x) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \int_A f_k(x)m(dx)
\end{aligned}$$

である。また、式 (44) より

$$\begin{aligned}
\int_A f(x)m(dx) &\geq \int_A \sum_{k=1}^{n} f_k(x)m(dx) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \int_A f_k(x)m(dx) \quad \because \text{有限和なので線形性より}
\end{aligned}$$

であり、n は任意なので $n \to \infty$ として

$$\int_A f(x)m(dx) \geq \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \int_A f_k(x)m(dx) = \sum_{k=1}^{\infty} \int_A f_k(x)m(dx)$$

なので、上の式と合わせて

$$\int_A f(x)m(dx) = \sum_{k=1}^{\infty} \int_A f_k(x)m(dx)$$

である。 $\boxed{\text{証明終}}$

定理 7.30 可積分関数 f に対して

$$\int_{\sum_{n=1}^{\infty} A_n} f(x)m(dx) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{A_n} f(x)m(dx)$$

(proof)

まず、f が非負の場合を考える。$I\left(x; \sum_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} I(x; A_n)$ が成立するので

$$\begin{aligned}
\int_{\sum_{n=1}^{\infty} A_n} f(x)m(dx) &= \int_{\sum_{n=1}^{\infty} A_n} f(x)I\left(x; \sum_{n=1}^{\infty} A_n\right) m(dx) \\
&= \int_{\sum_{n=1}^{\infty} A_n} f(x) \sum_{n=1}^{\infty} I(x; A_n)m(dx) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\sum_{n=1}^{\infty} A_n} f(x)I(x; A_n)m(dx) \quad \because \text{直前の定理 7.29} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_{A_n^c \cap \sum_{n=1}^{\infty} A_n} f(x)I(x; A_n)m(dx) + \int_{A_n} f(x)I(x; A_n)m(dx) \right) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \int_{A_n} f(x)m(dx) \quad \because \text{定理 7.21}
\end{aligned}$$

で示される。

f が一般の可積分関数である場合。$f(x) = f^+(x) - f^-(x)$ とすれば f^+, f^- は非負可測関数であり、可積分の条件から、それぞれの積分は有限である。よって

$$\begin{aligned}
\int_{\sum_{n=1}^{\infty} A_n} f(x)m(dx) &= \int_{\sum_{n=1}^{\infty} A_n} f^+(x)m(dx) - \int_{\sum_{n=1}^{\infty} A_n} f^-(x)m(dx) \quad (= \text{有限}) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \int_{A_n} f^+(x)m(dx) - \sum_{n=1}^{\infty} \int_{A_n} f^-(x)m(dx) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \int_{A_n} \{f^+(x) - f^-(x)\}m(dx) \quad \because f^+, f^- \text{の非負性から絶対収束するため} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \int_{A_n} f(x)m(dx)
\end{aligned}$$

証明終

定理 7.31 （増加列の極限と積分の交換可能性）可測関数列 $\{f_n\}$ が、$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ で

$$f_1(x) \leq \cdots \leq f_n(x) \leq \cdots \leq f(x)$$

を満たすとき

$$\int_A f(x)m(dx) = \int_A \lim_{n\to\infty} f_n(x)m(dx) = \lim_{n\to\infty} \int_A f_n(x)m(dx)$$

(proof)

$$g_n(x) \equiv f_{n+1}(x) - f_n(x)$$

と定義すれば、g_n は非負可測関数である。また、明らかに

$$\sum_{i=1}^{n-1} g_i(x) = f_n(x) - f_1(x)$$

であり、n は任意なので

$$\sum_{i=1}^{\infty} g_i(x) = f(x) - f_1(x)$$

である。よって

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\int_A f_n(x)m(dx) &= \lim_{n\to\infty}\int_A \left\{\sum_{i=1}^{n-1} g_i(x) + f_1(x)\right\} m(dx) \\
&= \lim_{n\to\infty}\left\{\sum_{i=1}^{n-1}\int_A g_i(x)m(dx) + \int_A f_1(x)m(dx)\right\} \\
&= \sum_{i=1}^{\infty}\int_A g_i(x)m(dx) + \int_A f_1(x)m(dx) \\
&= \int_A \sum_{i=1}^{\infty} g_i(x)m(dx) + \int_A f_1(x)m(dx) \quad \because \text{定理 } 7.29 \\
&= \int_A (f(x) - f_1(x))m(dx) + \int_A f_1(x)m(dx) \\
&= \int_A f(x)m(dx)
\end{aligned}$$

である[13]。 証明終

定理 7.32 （ファトゥーの不等式）非負可測関数列 $\{f_n\}$ について

$$\int_A \underline{\lim}\, f_n(x)m(dx) \leq \underline{\lim} \int_A f_n(x)m(dx)$$

(proof)

$$g_n(x) \equiv \inf_{m\geq n} f_m(x)$$

とすると、下極限の定義より $\lim_{n\to\infty} g_n(x) = \underline{\lim}\, f_n(x)$ で

$$f_1(x) \leq \cdots \leq f_n(x) \leq \cdots \leq f(x)$$

である。よって、定理 7.31 より

$$\begin{aligned}
\int_A \underline{\lim}\, f_n(x)m(dx) &= \int_A \lim_{n\to\infty} g_n(x)m(dx) \\
&= \lim_{n\to\infty}\int_A g_n(x)m(dx) \\
&= \underline{\lim}\int_A g_n(x)m(dx) \quad \because \text{定理 } A.7 \\
&\leq \underline{\lim}\int_A f_n(x)m(dx) \quad \because \int_A g_n(x)m(dx) \leq \int_A f_n(x)m(dx) \text{ より定理 } A.8
\end{aligned}$$

証明終

[13] 極限を積分の中に直接入れられないので、一度、すでに積分との交換可能性を示した無限和の形にして、積分の中に入れ込んでいる。

定理 7.33 （ルベーグの収束定理・優収束定理）可測関数列 $\{f_n\}$ が、$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ で、ある可積分である関数 $F(x)$ が存在して

$$|f_n(x)| \leq F(x)$$

を満たすとき

$$\int_A f(x)m(dx) = \int_A \lim_{n\to\infty} f_n(x)m(dx) = \lim_{n\to\infty} \int_A f_n(x)m(dx)$$

となる。

(proof)

条件より $F(x) + f_n(x) \geq 0$ なので、ファトゥーの不等式 7.32 が適用できて

$$\int_A \underline{\lim}\{F(x) + f_n(x)\}m(dx) \leq \underline{\lim} \int_A \{F(x) + f_n(x)\}m(dx)$$
$$\int_A \underline{\lim}\, f_n(x)m(dx) \leq \underline{\lim} \int_A f_n(x)m(dx)$$

であり、また条件より $F(x) - f_n(x) \geq 0$ なので、同様に

$$\int_A \underline{\lim}\{-f_n(x)\}m(dx) \leq \underline{\lim} \int_A \{-f_n(x)\}m(dx)$$
$$-\int_A \overline{\lim}\, f_n(x)m(dx) \leq -\overline{\lim} \int_A f_n(x)m(dx) \quad \because \text{定理 } A.9$$
$$\int_A \overline{\lim}\, f_n(x)m(dx) \geq \overline{\lim} \int_A f_n(x)m(dx)$$

であり、さらに定理 A.6 を用いると

$$\int_A \underline{\lim}\, f_n(x)m(dx) \leq \underline{\lim} \int_A f_n(x)m(dx) \leq \overline{\lim} \int_A f_n(x)m(dx) \leq \int_A \overline{\lim}\, f_n(x)m(dx)$$

が成立する、このとき $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ から定理 A.7 より

$$\underline{\lim}\, f_n(x) = \overline{\lim}\, f_n(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$$

なので、上の不等式はすべて等号で結ばれ

$$\underline{\lim} \int_A f_n(x)m(dx) = \overline{\lim} \int_A f_n(x)m(dx) = \int_A \lim_{n\to\infty} f_n(x)m(dx)$$

となるので、定理 A.7 より $\int_A f_n(x)m(dx)$ は収束し

$$\int_A \lim_{n\to\infty} f_n(x)m(dx) = \lim_{n\to\infty} \int_A f_n(x)m(dx)$$

となる。 証明終

この定理は、積分の極限に関する最も一般的な言及であると考えられ、ルベーグ積分を導入する主要なモチベーションの一つは、この定理にある。

7.5.4 その他の性質

定理 7.34 $I(x; B)$ を可測集合 B の定義関数として

$$\int_A f(x)I(x; B)m(dx) = \int_{A\cap B} f(x)m(dx)$$

となる。

(proof)
まず f が単関数である場合を考える。このとき、可測集合列 $\{E_i\}$ によって $f(x)=\sum_i \alpha_i I(x;E_i)$ と表わされるので

$$\begin{aligned}
\int_A f(x)I(x;B)m(dx) &= \int_A \sum_i \alpha_i I(x;E_i)I(x;B)m(dx) \\
&= \int_A \sum_i \alpha_i I(x;E_i\cap B)m(dx) \qquad \because I(x;X\cap Y)=I(x;X)I(x;Y) \\
&= \sum_i \alpha_i m(E_i\cap B\cap A) \\
&= \sum_i \alpha_i m(E_i\cap (B\cap A)) \\
&= \int_{A\cap B} \sum_i \alpha_i I(x;E_i)m(dx) \\
&= \int_{A\cap B} \sum_i f(x)m(dx)
\end{aligned}$$

である。よって単関数の場合は示された。f が非負可測関数の場合は、定理 7.19 より近似単関数列の積分の極限として表されるので、この場合も成立する。f が一般の可測関数の場合も、線形性より成立する。よって示された。 $\boxed{\text{証明終}}$

定義 7.8 測度空間 $X(\mathfrak{B},\mu_y)$ について

$$\mu_y(A)=I(y;A)=\begin{cases}1 & y\in A\\ 0 & y\notin A\end{cases}$$

となっているとき、μ_y を y に集積した**ディラック測度**という。◂

定理 7.35 μ_y が y に集積したディラック測度であるとき

$$\int_A g(x)\mu_y(dx)=g(y)I(y;A)$$

となる。

(proof)
g が単関数のときは $g(x)=\sum_i \alpha_i I(x;E_i)$ と表され

$$\int_A g(x)\mu_y(dx)=\sum_i \alpha_i \mu_y(E_i\cap A)$$

であり、これより明らかに $y\notin A$ ならば $\int_A g(x)\mu_y(dx)=0$ である。$y\in A$ ならば、ある唯一の j が存在して $y\in E_j\cap A$ であり、$E_j=g^{-1}(\{\alpha_j\})$ より $g(y)=\alpha_j$ となっている。よって

$$\begin{aligned}
\int_A g(x)\mu_y(dx) &= \sum_i \alpha_i \mu_y(E_i\cap A) \\
&= \alpha_j = g(y)
\end{aligned}$$

である。f が非負可測関数の場合は、定理 7.19 より近似単関数列の積分の極限として表されるので、この場合も成立する。f が一般の可測関数の場合も、線形性より成立する。よって示された。 $\boxed{\text{証明終}}$

8　almost everywhere 関係及び L^p-空間

8.1　almost everywhere

almost everywhere「ほとんど至るところ」の定義については、すでに定義 2.4 に記しているが、可測関数がほとんど至るところ等しいことの定義を改めて記しておく。

定義 8.1 測度空間 $X(\mathfrak{B}, m)$ とその可測関数 f, g について、ある零集合 N が存在して

$$x \in N^c \quad \rightarrow \quad f(x) = g(x)$$

となるならば、可測関数 f, g は**ほとんど至るところ（*almost everywhere*）等しい**といい、

$$f = g \quad a.e.$$

のように表す。◂

定理 8.1 二つの可測関数に関する二項関係 $f = g \quad a.e.$ は同値関係であり、その商集合上で、線形結合は *well-defined* である。

(proof)
反射律、対称律は自明である。推移律について。$f = g \quad a.e. \quad g = h \quad a.e.$ とする。このとき、ある零集合 N_1, N_2 が存在して

$$\begin{aligned} x \in N_1^c \quad &\rightarrow \quad f(x) = g(x) \\ x \in N_2^c \quad &\rightarrow \quad g(x) = h(x) \end{aligned}$$

であるから

$$x \in N_1^c \cap N_2^c \quad \rightarrow \quad f(x) = g(x) = h(x)$$

であり、推移律も成立する。線形結合が well-defined であること、すなわち、同値類 $[f], [g]$ について

$$\forall f_0 \in [f], \forall g_0 \in [g] \quad \Rightarrow \quad \alpha f_0 + \beta g_0 = \alpha f + \beta g \quad a.e.$$

が成り立つことも、同様に示せる。 証明終

定理 8.2 N が測度 m について零集合 $(m(N) = 0)$ ならば、任意の可測関数 f について

$$\int_N f(x) m(dx) = 0$$

(proof)
まず非負可測関数である場合を考える。定理 7.15 より f は近似単関数列 $\{\varphi_n\}$ を持つ。単関数の積分の定義を考えれば明らかに、各単関数について

$$\int_N \varphi_n m(dx) = 0$$

である。よって、定理 7.19 より

$$\int_N f(x) m(dx) = \lim_{n \to \infty} \int_N \varphi_n m(dx) = 0$$

となる。

非負でない場合には $f = f^+ - f^-$ と二つの非負可測関数に分解して線形性を使えばよい。 証明終

定理 8.3 $f = g \quad a.e.$ ならば

$$\int_A f(x)m(dx) = \int_A g(x)m(dx)$$

(proof)

$f = g \quad a.e.$ なので、ある零集合 N が存在して $x \in N^c$ ならば $f(x) = g(x)$ となる。よって

$$\begin{aligned}
\int_A f(x)m(dx) &= \int_{A\cap N} f(x)m(dx) + \int_{A\cap N^c} f(x)m(dx) \quad \because \text{定理 } 7.23 \\
&= \int_{A\cap N^c} f(x)m(dx) \quad \because m(A\cap N) \le m(N) = 0 \text{ から直前の定理より} \\
&= \int_{A\cap N^c} g(x)m(dx) \quad \because \text{定理 } 7.21 \\
&= \int_{A\cap N} g(x)m(dx) + \int_{A\cap N^c} g(x)m(dx) \quad \because m(A\cap N) = 0 \text{ から直前の定理より} \\
&= \int_A g(x)m(dx)
\end{aligned}$$

である。 $\boxed{\text{証明終}}$

定理 7.20 と上の定理を鑑みると、積分を考える場合には、零集合を除いた部分、すなわち「ほとんど至るところ等しい」部分だけを考えればいいことになる。

定理 8.4 測度空間 X とその可測関数 f について

$$f = 0 \quad a.e. \quad \Leftrightarrow \quad \int_X |f(x)|m(dx) = 0$$

(proof)

$\Rightarrow$ については、定理 8.3 より示される。$\Leftarrow$ について、対偶を取って考える。$f = 0 \quad a.e.$ でないと仮定すると、$E_{|f|>0} \equiv \{x; |f(x)| > 0\}$ とおけば

$$m(E_{|f|>0}) > 0$$

である。このとき

$$E_n \equiv \left\{x; |f(x)| > \frac{1}{n}\right\}$$

とおくと

$$E_1 \subset E_2 \subset \cdots \subset E_n \subset E_{|f|>0}$$

と増加列であり、極限集合 $\lim E_n = E_{|f|>0}$ を持つので、単調極限定理 2.10 より

$$\lim_{n\to\infty} m(E_n) = m(\lim E_n) = m(E_{|f|>0}) > 0$$

である。よって、ある自然数 N があって、$N \le n$ のとき

$$\left|m(E_n) - m(E_{|f|>0})\right| < m(E_{|f|>0}) \quad \therefore m(E_n) > 0$$

であるから

$$\begin{aligned}
\int_X |f(x)|m(dx) &\ge \int_{E_N} |f(x)|m(dx) \\
&\ge \int_{E_N} \frac{1}{N}m(dx) \\
&\ge \frac{1}{N}m(E_N) > 0
\end{aligned}$$

である。よって示された。 $\boxed{\text{証明終}}$

上の定理より、直ちにこれが言える。

定理 8.5 測度空間 X とその可測関数 f, g について

$$f = g \quad a.e. \quad \Leftrightarrow \quad \int_X |f(x) - g(x)| m(dx) = 0$$

定理 8.6 測度空間 X とその可測関数 f について

$$\int_X |f(x)| m(dx) < \infty \quad \rightarrow \quad |f(x)| < \infty \quad a.e.$$

(proof)

対偶を考える。$|f(x)| < \infty \quad a.e.$ でないとすると、$E \equiv \{x \in X; f(x) = \infty\}$ とおくと $m(E) > 0$ である。このとき

$$\begin{aligned}
\int_X |f(x)| m(dx) &= \int_E |f(x)| m(dx) + \int_{E^c} |f(x)| m(dx) \\
&= \sup_{0 \leq \varphi(x) \leq \infty} \int_E \varphi(x) m(dx) + \int_{E^c} |f(x)| m(dx) \\
&= \infty
\end{aligned}$$

である。よって示された。 $\boxed{\text{証明終}}$

8.2 可積分関数

可積分の定義は既に述べているが、可積分関数を厳密に定義しておく。

定義 8.2 測度空間 $X(\mathfrak{B}, m)$ の可測関数 f が**可積分関数**であるとは、

$$f^+(x) = \max(f(x), 0) \quad f^-(x) = \max(-f(x), 0)$$

によって $f(x) = f^+(x) - f^-(x)$ と二つの非負可測関数に分解したとき

$$\int_X f^+(x) m(dx) < \infty \quad \text{かつ} \quad \int_X f^-(x) m(dx) < \infty$$

となることを言う。◂

定理 8.7 f が可積分であることと $|f|$ が可積分であることは同値である。

(proof)

f が可積分ならば $\int_X f^+(x) m(dx), \int_X f^-(x) m(dx) < \infty$ であり

$$|f(x)|^+ = f^+(x) + f^-(x) \quad |f(x)|^- = 0$$

なので

$$\int_X |f(x)| m(dx) = \int_X f^+(x) m(dx) + \int_X f^-(x) m(dx) < \infty$$

である。逆は、$|f|$ が可積分であれば、上の式より、$\int_X f^+(x)m(dx), \int_X f^-(x)m(dx) < \infty$ が必要である。
証明終

同様にして、明らかに次が成り立つ。

定理 8.8 f が可積分であることと、$\int_X f(x)m(dx)$ が有限であることは同値である。

線形性も考慮すれば、明らかに以下も成り立つ。

定理 8.9 可積分関数の線形結合は、可積分関数である。

次は、ルベーグの収束定理（優収束定理）に関連する補題である。

補題 8.10 ルベーグの収束定理の条件を満たす関数列 $\{f_n\}$ と関数 f、すなわち、可測関数列 $\{f_n\}$ が、$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ で、ある可積分関数 $F(x)$ が存在して

$$|f_n(x)| \leq F(x)$$

を満たすとき、f_n および f は可積分関数である。

(proof)
上に述べた定理により、f_n が可積分関数であることは明らかである。また

$$|f_n(x)| \leq F(x)$$

において、$n \to \infty$ とすることにより

$$|f(x)| \leq F(x)$$

なので、f も可積分関数である。 証明終

8.3 L^2-空間

定義 8.3 測度空間 X において、可測関数 f が

$$\int_X |f(x)|^2 m(dx) < \infty$$

を満たすとき、f を**二乗可積分関数**という。◂

定理 8.11 二乗可積分関数の線形結合は、二乗可積分関数である。

(proof)
容易、証明略。 証明終

定理 8.12 二乗可積分関数 f, g, h について

$$(f, g) \equiv \int_X f(x)g(x)m(dx)$$

とすると

$$
\begin{aligned}
(f,f) &\geq 0 \\
(f,f) = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad f = 0 \quad a.e. \\
(\alpha f + \beta g, h) &= \alpha(f,h) + \beta(g,h) \\
(f,g) &= (g,f)
\end{aligned}
$$

が成り立つ。

(proof)
　二番目の命題について

$$
\begin{aligned}
(f,f) = \int_X f(x)f(x)m(dx) = \int_X |f(x)^2| m(dx) = 0 \\
\Leftrightarrow \quad f^2 = 0 \quad a.e. \quad \because \text{定理 } 8.4 \\
\Leftrightarrow \quad f = 0 \quad a.e.
\end{aligned}
$$

である。ほかは明らか。 証明終

定義 8.4 定理 *8.1* より、「ほとんど至るところ等しい」関係によって同値類を考えることができるが、これは、ほとんど至るところ等しい関数を同一視することに相当する。同定理は、その商集合上で、線形結合が *well-defined* であることも述べているが、これは、同値類の線形結合を考えていいということである。また、定理 *8.3* より、この商集合の同じ同値類に属する関数の積分は等しい。したがって、積分を介して作られる概念は、すべて *well-defined* になる。具体的には、同じ同値類に属する関数が二乗可積分であるかどうかは等しい。また、直前の定理で出てきた (f,g) も *well-defined* である。

　以上と、上に記した「二乗可積分関数の線形結合は、二乗可積分関数である」ことより、「ほとんど至るところ等しい」関係による同値類のうち、二乗可積分であるもの全体の集合は、線形空間[14]を成す。また、同値類上では、$f = g \quad a.e.$ を等号によって結ばれていると考えるので、直前の定理より

$$
(f,g) \equiv \int_X f(x)g(x)m(dx)
$$

は内積となる。よって、この線形空間は（実）内積空間[15]となる。この空間を $\mathbf{L^2}$**-空間**という。◂

　数学的には、L^2-空間は、同値類による商集合だが、諸々の概念が well-defined であることを知った上では、構成をよく考えると、普通に二乗可積分関数を元として扱い、等号を考えるときだけ $a.e.$ をつければよいということがわかる。実際に L^2-空間を扱う際には、よくこのような処理をする。

　詳細は省くが、内積から $\|x\| \equiv \sqrt{(x,x)}$ より、ノルムを作ることができ、ノルムより $d(x,y) \equiv \|x-y\|$ と定義することで、距離関数を作ることができる。したがって、内積空間は距離空間であり、収束の概念を考えることができる。（付録参照）

　L^2-空間に関しては、収束について（コーシー）完備性が成り立っていることが重要である。一般に、（コーシー）完備な内積空間を、**ヒルベルト空間**という。ヒルベルト空間には、付録にある程度のことを記し、深くここでは立ち入らないが、L^2-空間の完備性は、ルベーグ積分の性質と深く関係があるので、ここで示しておく。

[14] ここでは、線形空間や内積・ノルム・距離空間などについては既知のことであるとして扱う。付録にも一定の記述がある。
[15] 線形空間を作るときは、線形結合を考えるときの体は何をとってもよい。ここでは、複素可測関数を扱っていないので、実数体を採用したが、複素数体が用いられることも多い。

定理 8.13 L^2-空間はコーシー完備である。

(proof)

コーシー完備であるとは、L^2-空間の任意のコーシー列 $\{f_n\}$ が収束することであるが、定理 B.8 より、収束部分列の存在を示せばよい。ここでの収束とは、ノルム

$$\|f\| \equiv \sqrt{(f,f)} = \sqrt{\int_X |f(x)|^2 m(dx)}$$

から導かれる距離に基づく収束である。さて、コーシー列なので、任意の自然数 k に対して、$N(k)$ が存在して、任意の $n, m \geq N(k)$ に対して $\|f_n - f_m\| < \frac{1}{2^k}$ となる。このとき、特に

$$\|f_{N(k+1)} - f_{N(k)}\| < \frac{1}{2^k}$$

が成り立つ。$N(k)$ は大きくとる分には任意性があるので、狭義単調増加 $N(1) < N(2) < \cdots$ であるようにとるものとする。このとき、$k \to \infty$ ならば $N(k) \to \infty$ である。

この部分列 $\{f_{N(k)}\}$ が収束することを示したい。二乗可積分関数の関数列である $\{f_{N(k)}\}$ の L^2-空間における収束を論じるのにも、収束先の f を知った上で

$$\lim_{k\to\infty} \|f - f_{N(k)}\| = 0$$

を示すのがよくある手法であろう。そして、その f としては、各点での極限をとった $\lim_{k\to\infty} f_{N(k)}(x)$ であることが予想[16]されるので、まず、各点での $f_n(x)$ の収束について考える。これが収束するかどうかや、収束したとして二乗可積分関数（つまり L^2-空間の元）であるかは自明ではない。ここで

$$g_k(x) = |f_{N(1)}(x)| + \sum_{j=1}^{k} |f_{N(j+1)}(x) - f_{N(j)}(x)|$$

とおくと

$$\begin{aligned}
\|g_k\| &\leq \|f_{N(1)}\| + \sum_{j=1}^{k} \|f_{N(j+1)} - f_{N(j)}\| \quad \because \text{ノルムの三角不等式} \\
&< \|f_{N(1)}\| + \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{2^j} \\
&< \|f_{N(1)}\| + 1
\end{aligned}$$

となるので、g_k は二乗可積分関数であり、また、定義より明らかに

$$0 \leq g_1(x) \leq g_2(x) \leq \cdots$$

となっていることから、定理 A.4 より $\lim_{k\to\infty} g_k(x)$ は収束するか、無限大に発散する。さらに、これから定理 7.31（増加列の極限と積分の交換可能性）より

$$\int_X \lim_{k\to\infty} |g_k(x)|^2 m(dx) = \lim_{k\to\infty} \int_X |g_k(x)|^2 m(dx) = \lim_{k\to\infty} \|g_k\|^2 \leq (\|f_{N(1)}\| + 1)^2 < \infty$$

となるので、$g(x) \equiv \lim_{k\to\infty} g_k(x)$ は二乗可積分である。加えて、定理 8.6 より

$$g(x) < \infty \quad a.e.$$

[16] 実際には $f(x) = \lim_{k\to\infty} f_{N(k)}(x) \quad a.e.$ となる関数をとる。証明の後半にそのことが記されている。

となる。恒等式

$$f_{N(k)}(x) = f_{N(1)}(x) + \sum_{j=1}^{k-1}\{f_{N(j+1)}(x) - f_{N(j)}(x)\}$$

において、右辺で $k \to \infty$ とした無限級数は $g(x) < \infty$ なる x で絶対収束し、また g_k の定義と比較すると

$$|f_{N(k)}(x)| \leq g_k(x)$$

であるから $\lim_{k\to\infty} f_{N(k)}(x) \equiv f(x)$ はほとんど至るところ有限値に収束し $|f(x)| \leq g(x)$ が成立する。先ほどの恒等式を用いて

$$f(x) - f_{N(k)}(x) = \sum_{j=k}^{\infty}\{f_{N(j+1)}(x) - f_{N(j)}(x)\}$$

なので

$$|f(x) - f_{N(k)}(x)| = \left|\sum_{j=k}^{\infty}\{f_{N(j+1)}(x) - f_{N(j)}(x)\}\right| \leq \sum_{j=k}^{\infty}\left|f_{N(j+1)}(x) - f_{N(j)}(x)\right| \leq g(x)$$

から $|f(x) - f_{N(k)}(x)|^2 \leq |g(x)|^2$ であり、$|g(x)|^2$ は可積分（g が二乗可積分）なので、ルベーグの収束定理（優収束定理）より

$$\begin{aligned}
\lim_{k\to\infty} \|f - f_{N(k)}\|^2 &= \lim_{k\to\infty} \int_X |f(x) - f_{N(k)}(x)|^2 m(dx) \\
&= \int_X \lim_{k\to\infty} |f(x) - f_{N(k)}(x)|^2 m(dx) \\
&= \int_X |f(x) - f(x)|^2 m(dx) = 0
\end{aligned}$$

となる。コーシー列 $\{f_n\}$ は収束部分列 $\{f_{N(k)}\}$ を持つので、定理 B.8 より収束する。よって示された。
証明終

8.4 L^p-空間

補題 8.14 任意の $\alpha, \beta \geq 0$ と $p > 1$ で

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

なる p, q について

$$\alpha\beta \leq \frac{\alpha^p}{p} + \frac{\beta^q}{q}$$

(proof)
$x \geq 0$ に対する関数

$$f(x) \equiv \frac{1}{p}x^p + \frac{1}{q} - x$$

は $x = 1$ のとき最小値 0 をとるので

$$x \leq \frac{1}{p}x^p + \frac{1}{q}$$

であり、これに $x = \alpha\beta^{-\frac{q}{p}}$ を代入して β^q をかければよい。 証明終

定理 8.15 （ヘルダーの不等式）$p > 1$ で $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$ なる p, q について

$$\int_X |f(x)g(x)|m(dx) \leq \left(\int_X |f(x)|^p m(dx)\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_X |g(x)|^q m(dx)\right)^{\frac{1}{q}}$$

(proof)

$|f(x)|^p, |g(x)|^q$ のいずれかが可積分でないならば、明らかである。$\int_X |f(x)|^p m(dx), \int_X |g(x)|^q m(dx)$ のいずれかが 0 であるときは、定理 8.4 より $f = 0 \quad a.e.$ もしくは $g = 0 \quad a.e.$ なので明らかである。そうでない場合は、上の補題において

$$\alpha = |f(x)| \left(\int_X |f(x)|^p m(dx)\right)^{-\frac{1}{p}}$$
$$\beta = |g(x)| \left(\int_X |g(x)|^q m(dx)\right)^{-\frac{1}{q}}$$

とすると

$$\frac{|f(x)g(x)|}{\left(\int_X |f(x)|^p m(dx)\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_X |g(x)|^q m(dx)\right)^{\frac{1}{q}}} \leq \frac{|f(x)|^p}{p\int_X |f(x)|^p m(dx)} + \frac{|g(x)|^q}{q\int_X |g(x)|^q m(dx)}$$

であり、この積分をとると示される。 証明終

定理 8.16 （ミンコフスキーの不等式）任意の $1 < p < \infty$ について

$$\left(\int_X |f(x)+g(x)|^p m(dx)\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int_X |f(x)|^p m(dx)\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_X |g(x)|^p m(dx)\right)^{\frac{1}{p}}$$

(proof)

$p = 1$ または $\int_X |f(x)+g(x)|^p m(dx) = 0$ の場合、$\int_X |f(x)|^p m(dx), \int_X |g(x)|^p m(dx)$ のいずれかが無限大である場合は明らか。そうでないとき

$$|f(x)+g(x)|^p = |f(x)+g(x)|^{p-1}|f(x)+g(x)| \leq |f(x)+g(x)|^{p-1}(|f(x)|+|g(x)|)$$

から、$q = \dfrac{p}{p-1}$ として

$$\begin{aligned}
\int_X |f(x)+g(x)|^p m(dx) &\leq \int_X |f(x)+g(x)|^{p-1}|f(x)|m(dx) + \int_X |f(x)+g(x)|^{p-1}|g(x)|m(dx) \\
&\leq \left(\int_X |f(x)+g(x)|^{q(p-1)} m(dx)\right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_X |f(x)|^p m(dx)\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\quad + \left(\int_X |f(x)+g(x)|^{q(p-1)} m(dx)\right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_X |g(x)|^p m(dx)\right)^{\frac{1}{p}} \qquad \because \text{ヘルダーの不等式} \\
&= \left(\int_X |f(x)+g(x)|^p m(dx)\right)^{\frac{p-1}{p}} \left\{\left(\int_X |f(x)|^p m(dx)\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_X |g(x)|^p m(dx)\right)^{\frac{1}{p}}\right\}
\end{aligned}$$

これに $\left(\int_X |f(x)+g(x)|^p m(dx)\right)^{\frac{1-p}{p}}$ をかければ示される。 証明終

定義 8.5 L^2-空間と同様に、ほとんど至る所等しい関数を同一視し（ほとんど至る所等しい関数による同値類を考え）、任意の実数 $p \geq 1$ をとって **$\mathbf{L^p}$− 空間**を

$$L^p \equiv \left\{ f ; \int_X |f(x)|^p m(dx) < \infty \right\}$$

と定義すると、これは線形空間であり、また

$$\|f\|_p \equiv \left(\int_X |f(x)|^p m(dx) \right)^{\frac{1}{p}}$$

と定義すると、明らかに斉次性・非負性を満たし、定理 *8.4* から

$$\|f\|_p = 0 \quad \Leftrightarrow \quad f = 0 \quad a.e.$$

となり、かつ、ミンコフスキーの不等式より三角不等式が成立するので、これはノルムであり、L^p-空間はノルム空間となる。L^p-空間のノルムを L^p ノルムという。また、定理 *8.13* における L^2-空間の完備性の証明において、2 乗を p 乗に置き換えると、L^p-空間の完備性の証明となる。一般に完備なノルム空間を**バナッハ空間**というが、上に述べたことより L^p-空間はバナッハ空間である。◂

9 ルベーグ積分

既に軽く触れているが、ルベーグ測度空間上の積分、すなわち、f を $\boldsymbol{R^n}$ から $\boldsymbol{R}$ への可測関数、E を $\boldsymbol{R^n}$ の可測集合とし、m をルベーグ測度としたときの

$$\int_E f(x)m(dx)$$

を**ルベーグ積分**[17]というのであった。また、次の定義を置く。

定義 9.1 ルベーグ測度についての可測関数を特に**ルベーグ可測関数**という。◂

定理 9.1 g をルベーグ可測関数とし、$f = g \quad a.e.$ だとすると、f もルベーグ可測関数である。

(proof)

$f = g \quad a.e.$ より、ある零集合 N が存在して $x \in N^c$ ならば $f(x) = g(x)$ である。さて、任意の実数 $\alpha \leq \beta$ について

$$f^{-1}[\alpha, \beta) = f^{-1}[\alpha, \beta) \cap N + f^{-1}[\alpha, \beta) \cap N^c$$

ルベーグ測度はカラテオドリ外測度から導かれる測度なので、定理 3.7 より $f^{-1}[\alpha, \beta) \cap N$ は可測集合である。また、$\forall x \in f^{-1}[\alpha, \beta) \cap N^c$ について $f(x) = g(x)$ なので $f^{-1}[\alpha, \beta) \cap N^c = g^{-1}[\alpha, \beta) \cap N^c$ であり、これも可測集合である。よって、可測集合の和集合である $f^{-1}[\alpha, \beta)$ は可測であり、f はルベーグ可測関数である。 証明終

9.1 リーマン積分との関係

リーマン積分については概ね既知として扱っている。頭の整理のため、まず、リーマン積分を確認程度に軽くまとめる。

定義 9.2 $f : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ と区間 $[a, b]$ について、$[a, b]$ 間に任意に分点

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_N = b$$

をとる。このとき

$$S^* = \inf_{\{x_n\}} \sum_{i=0}^{N-1} \left\{ \sup_{x_i \leq y < x_{i+1}} f(y) \right\} (x_{i+1} - x_i)$$
$$S_* = \sup_{\{x_n\}} \sum_{i=0}^{N-1} \left\{ \inf_{x_i \leq y < x_{i+1}} f(y) \right\} (x_{i+1} - x_i)$$

とおいたとき、$S^* = S_*$ となるならば、f は区間 $[a, b]$ で**リーマン積分可能**であるといい

$$\int_a^b f(x)dx = S^* = S_*$$

と表わす。$[a, b]$ でリーマン積分可能な関数は $[a, b]$ で有界である。◂

定理 9.2 （ダルブーの定理）記号は、上の定義と同じとする。$\max_i (x_{i+1} - x_i) \to 0$ となるよう分点を細かくすると

$$\sum_{i=0}^{N-1} \left\{ \sup_{x_i \leq y < x_{i+1}} f(y) \right\} (x_{i+1} - x_i) \to S^*$$
$$\sum_{i=0}^{N-1} \left\{ \inf_{x_i \leq y < x_{i+1}} f(y) \right\} (x_{i+1} - x_i) \to S_*$$

[17] 一般の測度空間上の積分をルベーグ積分という流儀もある。

となる。

ルベーグ積分は有界な区間におけるリーマン積分を包含している。

定理 9.3 $f : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ と区間 $[a,b]$ について、f は $[a,b]$ でリーマン積分可能であるとする。このとき、f は $[a,b]$ においてルベーグ可測であり

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{[a,b]} f(x)m(dx)$$

となる。つまり、リーマン積分とルベーグ積分の値が一致する。

(proof)

記号は、定義 9.2 と同じとする。$\forall x \in [a,b]$ について

$$\sum_{i=0}^{N-1} \left\{ \inf_{x_i \leq y < x_{i+1}} f(y) \right\} I(x; [x_i, x_{i+1})) \leq f(x) \leq \sum_{i=0}^{N-1} \left\{ \sup_{x_i \leq y < x_{i+1}} f(y) \right\} I(x; [x_i, x_{i+1}))$$

である。したがって、分点 $\{x_n^k\}$ を $[a,b]$ の 2^k 等分点とし

$$\phi(x) = \lim_{k\to\infty} \sum_{i=0}^{N-1} \left\{ \inf_{x_i^k \leq y < x_{i+1}^k} f(y) \right\} I(x; [x_i^k, x_{i+1}^k))$$
$$\psi(x) = \lim_{k\to\infty} \sum_{i=0}^{N-1} \left\{ \sup_{x_i^k \leq y < x_{i+1}^k} f(y) \right\} I(x; [x_i^k, x_{i+1}^k))$$

とすると

$$\phi(x) \leq f(x) \leq \psi(x)$$

である。また、f が $[a,b]$ リーマン積分可能なので、$[a,b]$ で f は有界である。さらに、定理 6.6 より

$$\sum_{i=0}^{N-1} \left\{ \inf_{x_i^k \leq y < x_{i+1}^k} f(y) \right\} I(x; [x_i^k, x_{i+1}^k)), \quad \sum_{i=0}^{N-1} \left\{ \sup_{x_i^k \leq y < x_{i+1}^k} f(y) \right\} I(x; [x_i^k, x_{i+1}^k))$$

は有界であり、かつ、可測集合に対する単関数で可測なので、ϕ, ψ も有界で可測である。このルベーグ積分をとると

$$\begin{aligned}
\int_{[a,b]} \phi(x)m(dx) &= \int_{[a,b]} \lim_{k\to\infty} \sum_{i=0}^{N-1} \left\{ \inf_{x_i^k \leq y < x_{i+1}^k} f(y) \right\} I(x; [x_i^k, x_{i+1}^k))m(dx) \\
&= \lim_{k\to\infty} \int_{[a,b]} \sum_{i=0}^{N-1} \left\{ \inf_{x_i^k \leq y < x_{i+1}^k} f(y) \right\} I(x; [x_i^k, x_{i+1}^k))m(dx) \quad \because \text{有界性より優収束定理 7.33} \\
&= \lim_{k\to\infty} \sum_{i=0}^{N-1} \left\{ \inf_{x_i^k \leq y < x_{i+1}^k} f(y) \right\} (x_{i+1}^k - x_i^k) \quad \because \text{単関数の積分} \\
&= S_* \quad \because \text{ダルブーの定理}
\end{aligned}$$

であり、同様にして

$$\int_{[a,b]} \psi(x)m(dx) = S^*$$

である。f は $[a,b]$ でリーマン積分可能なので $S^* = S_*$ であり

$$\begin{aligned}
0 &= \int_{[a,b]} \psi(x)m(dx) - \int_{[a,b]} \phi(x)m(dx) \\
&= \int_{[a,b]} (\psi(x) - \phi(x))m(dx) \\
&= \int_{[a,b]} |\psi(x) - \phi(x)|m(dx)
\end{aligned}$$

となる。よって、定理 8.4 より $[a,b]$ 上で $\psi = \phi \quad a.e.$ である。$\phi(x) \leq f(x) \leq \psi(x)$ を考えると

$$f = \psi = \phi \quad a.e.$$

である。よって、定理 9.1 より f も $[a,b]$ でルベーグ可測である。よって、f のルベーグ積分を考えることができる。

再び $\phi(x) \leq f(x) \leq \psi(x)$ より

$$S_* = \int_{[a,b]} \phi(x)m(dx) \leq \int_{[a,b]} f(x)m(dx) \leq \int_{[a,b]} \psi(x)m(dx) = S^*$$

であり、f は $[a,b]$ でリーマン積分可能なので $S^* = S_*$ より

$$\int_{[a,b]} f(x)m(dx) = S_* = S^* = \int_a^b f(x)dx$$

となる。 $\boxed{\text{証明終}}$

この定理は、リーマン積分がルベーグ積分に包含されることを示している。このことにより、**ルベーグ積分をリーマン積分の記号で表す**こともある。測度空間上の積分としてのルベーグ積分は、極限との交換などが扱いやすい一方、そのままでは実際の値を計算することが難しいという難点もあったが、この定理により、利点を保持したまま、リーマン積分の知識を用いることでかなり多くの関数が実際に計算できるようになる。また、リーマン積分可能な関数がルベーグ可測関数であることがこれによりわかるので、その知識を用いて、**連続関数や、より一般に不連続点が高々可算な関数**がルベーグ可測であることもわかる。さらに言って、ルベーグ積分は、ほとんど至るところ等しい関数を同一視するので、ほどんど至るところリーマン積分可能であればルベーグ積分は計算できるということになる。

ただし、リーマン積分の極限として定義される広義積分に関しては、必ずしもルベーグ積分に含まれるわけではない。すなわち、広義積分可能だがルベーグ積分不可能な関数も存在するということである。

9.2 フビニの定理

積測度空間の積分に関する命題群にフビニの定理がある。しかし、積位相空間の構成そのものが難解で手間がかかるので、ここでは実用的なルベーグ積分に関する部分だけ述べる。

9.2.1 有限加法族・単調族

定義 9.3 ある集合 X の部分集合族 $\mathfrak{F}$ が、以下の条件

1. $\phi \in \mathfrak{F}$
2. $A \in \mathfrak{F}$ なら $A^c \in \mathfrak{F}$
3. $A_1, A_2 \in \mathfrak{F}$ なら $A_1 \cup A_2 \in \mathfrak{F}$

を満たす時、集合族 $\mathfrak{F}$ を**有限加法族**という。◂

定義 9.4 ある集合 X の部分集合族 $\mathfrak{M}$ が、以下の条件

1. $\mathfrak{M}$ の増加列 $\{A_n\}$ について $\lim A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathfrak{M}$

2. $\mathfrak{M}$ の減少列 $\{A_n\}$ について $\lim A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathfrak{M}$

を満たす時、集合族 $\mathfrak{M}$ を**単調族**という。可算加法族は明らかに単調族である。また、可算加法族の時と同様に、集合族 β に対して、β を含む単調族全体を $\{\mathfrak{M}_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ として

$$mono[\beta] \equiv \bigcap_{\gamma\in\Gamma} \mathfrak{M}_\gamma$$

とすれば、$mono[\beta]$ は β を含む最小の単調族である。◂

定理 9.4 有限加法族かつ単調族ならば可算加法族である。

(proof)
$\mathfrak{B}$ が有限加法族でかつ単調族であるとする。有限加法族が可算加法族であるには、$\mathfrak{B}$ の集合列 $\{A_n\}$ について

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathfrak{B}$$

が成立すればよい。これについては、$B_n \equiv \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ とおけば、$\{B_n\}$ は増加列であり、したがって単調族であることより

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathfrak{B}$$

である。よって示された。 証明終

定理 9.5 有限加法族 $\mathfrak{F}$ に対して $mono[\mathfrak{F}]$ も有限加法族である。

(proof)
条件 1. は明らか。条件 2. について。

$$M_1 \equiv \{A; A^c \in mono[\mathfrak{F}]\}$$

とすると、$\mathfrak{F}$ について条件 2. がなりたつので $\mathfrak{F} \subset M_1$ である。また、M_1 の増加列 $\{A_n\}$ に対して、$\{A_n^c\}$ は $mono[\mathfrak{F}]$ の減少列である。よって、単調族であることより

$$\lim A_n^c = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n^c = \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right)^c \in mono[\mathfrak{F}]$$

であり、$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \lim A_n \in M_1$ である。減少列についても同様なことが言えるので、M_1 は単調族である。M_1 は $\mathfrak{F}$ を含む単調族なので、$mono[\mathfrak{F}]$ の最小性より $mono[\mathfrak{F}] \subset M_1$ である。つまり、$mono[\mathfrak{F}]$ については条件 2. が成り立つ。

条件 3. について。

$$M_2 \equiv \{A; \forall B \in \mathfrak{F} \text{ について } A \cup B \in mono[\mathfrak{F}]\}$$

とすると、$\mathfrak{F}$ について条件 3. がなりたつので $\mathfrak{F} \subset M_2$ である。また、M_2 の増加列 $\{A_n\}$ に対して、任意の $B \in \mathfrak{F}$ をとると $\{A_n \cup B\}$ は $mono[\mathfrak{F}]$ の増加列である。したがって、$mono[\mathfrak{F}]$ が単調族であることより

$$\lim A_n \cup B = \bigcup_{n=1}^{\infty} (A_n \cup B) = \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \cup B \in mono[\mathfrak{F}]$$

であり、$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in M_2$ である。減少列についても同様なことが言えるので、M_2 は単調族である。M_2 は $\mathfrak{F}$ を含む単調族なので、$mono[\mathfrak{F}]$ の最小性より $mono[\mathfrak{F}] \subset M_2$ である。つまり、任意の $A \in mono[\mathfrak{F}],\ B \in \mathfrak{F}$ について $A \cup B \in mono[\mathfrak{F}]$ となる。
ここで、さらに

$$M_3 \equiv \{A; \forall B \in mono[\mathfrak{F}] \text{ について } A \cup B \in mono[\mathfrak{F}]\}$$

とすると、直前の結果より $\mathfrak{F} \subset M_3$ である。これが単調族であることも、上と同様に示される。したがって、上と同様に $mono[\mathfrak{F}] \subset M_3$ であり、これは $mono[\mathfrak{F}]$ が条件 3. を満たすことを意味する。 $\boxed{\text{証明終}}$

定理 9.6 有限加法族 $\mathfrak{F}$ と単調族 $\mathfrak{M}$ について $\mathfrak{F} \subset \mathfrak{M}$ ならば

$$\sigma[\mathfrak{F}] = mono[\mathfrak{F}] \subset \mathfrak{M}$$

が成り立つ。標語的にいえば、つまり、ある有限加法族に単調族を成すようなある性質があり、その有限加法族を含む最小の可算加法族をつくると、作られた可算加法族もその同じ性質を満たす。

(proof)
まず、$\mathfrak{F} \subset \mathfrak{M}$ より $mono[\mathfrak{F}] \subset mono[\mathfrak{M}] = \mathfrak{M}$ である。また、直前の定理より $mono[\mathfrak{F}]$ は有限加法族なので、単調族かつ有限加法族であり、二つ前の定理より $mono[\mathfrak{F}]$ は可算加法族である。明らかに、$mono[\mathfrak{F}]$ は $\mathfrak{F}$ を含むので、$\sigma[\mathfrak{F}] \subset mono[\mathfrak{F}]$ である。一方、$\sigma[\mathfrak{F}]$ は $\mathfrak{F}$ を含む単調族でもあり、$mono[\mathfrak{F}] \subset \sigma[\mathfrak{F}]$ である。よって示された。 $\boxed{\text{証明終}}$

この定理に、有限加法族として、ボレル集合の矩形集合 $\boldsymbol{B}_p \times \boldsymbol{B}_q$ の有限個の直和の形で表されるものを用いて、そこから構成される可算加法族 $\boldsymbol{B}_{p+q}$ 上での性質を示すのが以下での手法である。

9.2.2　ボレル集合族に対するフビニの定理

補題 9.7 $F = \left\{ \sum_{k=1}^{n} A_k ; A_k \in \boldsymbol{B}_p \times \boldsymbol{B}_q \right\}$ とおくと、F は $\boldsymbol{R^{p+q}}$ 上の有限加法族であり、$\sigma[F] = \boldsymbol{B}_{p+q}$ である。

(proof)
$\emptyset \times \emptyset = \emptyset$ なので、条件 1. は満たされる。$A \cap B$ については、$A, B \in F$ ならば

$$A = \sum_{i=1}^{m} A_i \quad A_i \in \boldsymbol{B}_p \times \boldsymbol{B}_q \ (i = 1, \cdots m)$$
$$B = \sum_{j=1}^{n} B_j \quad B_j \in \boldsymbol{B}_p \times \boldsymbol{B}_q \ (j = 1, \cdots n)$$

とあらわされており、一般化分配則より

$$\begin{aligned} A \cap B &= \left(\sum_{i=1}^{m} A_i \right) \cap \left(\sum_{j=1}^{n} B_j \right) \\ &= \sum_{i=1}^{m} A_i \cap \left(\sum_{j=1}^{n} B_j \right) \\ &= \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} A_i \cap B_j \in F \end{aligned}$$

である。これを繰り返し用いれば、$A_1, \cdots, A_n \in F$ ならば $\bigcap_{i=1}^{n} A_i \in F$ である。

また、$A_1 \times A_2 \in \boldsymbol{B}_p \times \boldsymbol{B}_q$ について $(A_1 \times A_2)^c = A_1^c \times A_2^c + A_1 \times A_2^c + A_1^c \times A_2$ なので、$A \in \boldsymbol{B}_p \times \boldsymbol{B}_q$ ならば $A^c \in F$ である。$A \in F$ に対しては、

$$A = \sum_{i=1}^{m} A_i \quad A_i \in \boldsymbol{B}_p \times \boldsymbol{B}_q \ (i = 1, \cdots m)$$

と表され、ド・モルガン則と、すでに示したことより

$$\begin{aligned} A^c &= \left(\sum_{i=1}^{m} A_i \right)^c \\ &= \bigcap_{i=1}^{m} A_i^c \in F \end{aligned}$$

が成立する。すなわち、F は条件 2. を満たす。

条件 3. については、$A \cup B = A + B \cap A^c$ なので、すでに上に示したことより示される。よって、F は可算加法族である。

明らかに $F \subset \sigma[\boldsymbol{B}_p \times \boldsymbol{B}_q]$ なので、最小性より $\sigma[F] \subset \sigma[\boldsymbol{B}_p \times \boldsymbol{B}_q]$ であり、また、$\boldsymbol{B}_p \times \boldsymbol{B}_q \subset F$ だから $\sigma[\boldsymbol{B}_p \times \boldsymbol{B}_q] \subset \sigma[F]$ である。つまり $\sigma[F] = \sigma[\boldsymbol{B}_p \times \boldsymbol{B}_q]$ であり、さらに定理 5.7 より

$$\sigma[F] = \sigma[\boldsymbol{B}_p \times \boldsymbol{B}_q] = \boldsymbol{B}_{p \times q}$$

である。よって示された。 証明終

定義 9.5 $E \subset X \times Y$ について、$x \in X$ に対して $E_x \equiv \{y \in Y; (x, y) \in E\}$、$y \in Y$ に対して $E_y \equiv \{x \in X; (x, y) \in E\}$ と定義する。◂

これは、x, y を固定したときの切り口の集合である。

補題 9.8 補集合に関して $(E^c)_x = (E_x)^c$ であり、$A \subset X, B \subset Y$ のとき、矩形集合 $A \times B$ に対しては

$$(A \times B)_x = \begin{cases} B & x \in A \\ \emptyset & x \notin A \end{cases}, \quad (A \times B)_y = \begin{cases} A & y \in B \\ \emptyset & y \notin B \end{cases}$$

であり、集合列 $\{E_n\}$ については

$$\left(\bigcap_n E_n \right)_x = \bigcap_n (E_n)_x$$
$$\left(\bigcup_n E_n \right)_x = \bigcup_n (E_n)_x$$

が成立する。

(proof)
証明略。 証明終

補題 9.9 $E \in \boldsymbol{B}_{p+q}$ ならば、$\forall x \in \boldsymbol{R^p}$ に対して $E_x \in \boldsymbol{B}_q$ であり、$\forall y \in \boldsymbol{R^q}$ に対して $E_y \in \boldsymbol{B}_p$ である。また、$\boldsymbol{R^n}$ に対するルベーグ測度を m_n として $m_q(E_x)$ は x の関数として $\boldsymbol{B}_p$ について可測、$m_p(E_y)$ は y の関数として $\boldsymbol{B}_q$ について可測であり

$$\int_{\boldsymbol{R^p}} m_q(E_x) m_p(dx) = \int_{\boldsymbol{R^q}} m_p(E_y) m_q(dy) = m_{p+q}(E)$$

が成立する。

(proof)

補題 9.7 より、$F = \left\{ \sum_{k=1}^{n} A_k; A_k \in \boldsymbol{B}_p \times \boldsymbol{B}_q \right\}$ とおくと、F は $\boldsymbol{R^{p+q}}$ 上の有限加法族であり、$\sigma[F] = \boldsymbol{B}_{p+q}$ である。$K \in F$ は

$$K = \sum_{i=1}^{m} A_i \times B_i \quad A_i \in \boldsymbol{B}_p,\ B_i \in \boldsymbol{B}_q\ (i = 1, \cdots m)$$

と表される。

$K \in F$ に対しては、$K_x = \sum_{i=1}^{m} (A_i \times B_i)_x = \sum_{x \in A_i} B_i$ であるので、$\boldsymbol{B}_p$ の性質より $K_x \in \boldsymbol{B}_p$ である。よって

$$M_1 = \{E \subset \boldsymbol{R^{p+q}}; \forall x \in \boldsymbol{R^p} \text{に対して } E_x \in \boldsymbol{B}_q\}$$

とすると、$F \subset M_1$ である。また、M_1 の増加列 $\{E_n\}$ に対して、任意の $x \in \boldsymbol{R^p}$ をとると $(E_n)_x \in \boldsymbol{B}_q$ である。$\boldsymbol{B}_q$ は可算加法族なので

$$[\lim E_n]_x = \left[\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \right] \lim (E_n)_x = \bigcup_{n=1}^{\infty} (E_n)_x \in \boldsymbol{B}_q$$

である。つまり、$\lim E_n \in M_1$ である。同様のことが減少列に対しても言えるので、M_1 は単調族である。よって、定理 9.6 より $\boldsymbol{B}_{p+q} = \sigma[F] \subset M_1$ である。すなわち、$E \in \boldsymbol{B}_{p+q}$ ならば $\forall x \in \boldsymbol{R^p}$ に対して $E_x \in \boldsymbol{B}_q$ が成り立つ。E_y についても同様。

ここで、測度空間 $\boldsymbol{R^{p+q}}(\boldsymbol{B}_{p+q}, m_{p+q})$ が σ-有限であり、

$$Z_n \equiv \underbrace{[-n, n] \times \cdots \times [-n, n]}_{(p+q)\text{ 個}}$$

とおけば、$\{Z_n\}$ は増加列であり

$$m_{p+q}(Z_n) < \infty,\ \lim Z_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} Z_n = \boldsymbol{R^{p+q}}$$

となっていることに注意しておく。記述の簡易化のため

$$[-n, n]^k \equiv \underbrace{[-n, n] \times \cdots \times [-n, n]}_{k\text{ 個}}$$

と表わすものとする。

$K \in F$ について、k を固定して考えると

$$
\begin{aligned}
m_q([K \cap Z_k]_x) &= m_q\left(\sum_{i=1}^{m}(A_i \times B_i \cap Z_k)_x\right) \\
&= m_q\left(\sum_{x \in A_i,\ xin[-n,n]^p} B_i \cap (Z_k)_x\right) \\
&= m_q\left(\sum_{x \in A_i,\ xin[-n,n]^p} B_i \cap [-n,n]^q\right) \\
&= \sum_{x \in A_i,\ xin[-n,n]^p} m_q\left(B_i \cap [-n,n]^q\right) \\
&= \sum_{i=1}^{m} I(x; A_i \cap [-n,n]^p) m_q\left(B_i \cap [-n,n]^q\right)
\end{aligned}
$$

は可測集合族を $\boldsymbol{B}_p$ とした x の単関数であり、$\boldsymbol{B}_p$ について可測である。よって

$$
M_2^k = \{E \in \boldsymbol{B}_{p+q}; m_q([E \cap Z_k]_x) \text{ が } x \text{ の関数として } \boldsymbol{B}_p \text{について可測 }\}
$$

とすると、$F \subset M_2^k$ である。また、M_2^k の増加列 $\{E_n^k\}$ について、$\{[E_n^k \cap Z_k]_x\}$ が n について増加列なので単調極限定理 2.10 より[18]

$$
m_q\left(\left[\lim_n E_n^k \cap Z_k\right]_x\right) = \lim_{n\to\infty} m_q\left(\left[E_n^k \cap Z_k\right]_x\right)
$$

が成立し、$m_q([E_n^k \cap Z_k]_x)$ が x の関数として $\boldsymbol{B}_p$ について可測なので、定理 6.6 よりその極限である $m_q\left(\left[\lim_n E_n^k \cap Z_k\right]_x\right) = \lim_{n\to\infty} m_q\left(\left[E_n^k \cap Z_k\right]_x\right)$ も $\boldsymbol{B}_p$ について可測である。これは、$\lim_n E_n^k \in M_2^k$ を表しており、減少列についても同様のことが言えるので、M_2^k は単調族である。よって、定理 9.6 より $\boldsymbol{B}_{p+q} = \sigma[F] \subset M_2^k$ である。自然数 k は任意なので $\boldsymbol{B}_{p+q} \subset \bigcap_{k=1}^{\infty} M_2^k$ である。つまり、$\forall E \in \boldsymbol{B}_{p+q}$ について、任意の自然数 k に対して $m_q([E \cap Z_k]_x)$ は $\boldsymbol{B}_p$-可測関数である。ここで、再び単調極限定理 2.10 より

$$
m_q(E_x) = m_q([E \cap \lim Z_k]_x) = \lim_{k\to\infty} m_q([E \cap Z_k]_x)
$$

なので、定理 6.6 より $m_q(E_x)$ も $\boldsymbol{B}_p$-可測関数である。

$K \in F$ について、k を固定して考えると

$$
\begin{aligned}
\int_{\boldsymbol{R^p}} m_q([K \cap Z_k]_x) m_p(dx) &= \int_{\boldsymbol{R^p}} \left(\sum_{i=1}^{m} I(x; A_i \cap [-k,k]^p) m_q\left(B_i \cap [-k,k]^q\right)\right) m_p(dx) \\
&= \sum_{i=1}^{m} \int_{\boldsymbol{R^p}} I(x; A_i \cap [-k,k]^p) m_q\left(B_i \cap [-k,k]^q\right) m_p(dx) \\
&= \sum_{i=1}^{m} m_q\left(B_i \cap [-k,k]^q\right) m_p(A_i \cap [-k,k]^p) \\
&= \sum_{i=1}^{m} m_{p+q}(A_i \times B_i \cap [-k,k]^{p+q}) \quad \because \text{定理 } 5.17 \\
&= m_{p+q}\left(\sum_{i=1}^{m} A_i \times B_i \cap [-k,k]^{p+q}\right) \\
&= m_{p+q}\left(K \cap Z_k\right)
\end{aligned}
$$

[18] 有界な Z_k との共通部分をとるのは、これが減少列に対しても適用できるようにするためである。

なので
$$M_3^k=\left\{E\in\boldsymbol{B}_{p+q};\int_{\boldsymbol{R^p}}m_q([E\cap Z_k]_x)m_p(dx)=m_{p+q}\left(E\cap Z_k\right)\right\}$$
とすると、$F\subset M_3^k$ である。また、M_3^k の増加列 $\{E_n^k\}$ について
$$\int_{\boldsymbol{R^p}}m_q([E_n^k\cap Z_k]_x)m_p(dx)=m_{p+q}\left(E_n^k\cap Z_k\right)$$
が成り立っており、したがって
$$\begin{aligned}\int_{\boldsymbol{R^p}}m_q\left(\left[\lim_n E_n^k\cap Z_k\right]_x\right)m_p(dx)&=\int_{\boldsymbol{R^p}}\lim_{n\to\infty}m_q\left(\left[E_n^k\cap Z_k\right]_x\right)m_p(dx)\quad\because\text{単調極限定理 2.10}\\&=\lim_{n\to\infty}\int_{\boldsymbol{R^p}}m_q\left(\left[E_n^k\cap Z_k\right]_x\right)m_p(dx)\quad\because\{m_q\left(\left[E_n^k\cap Z_k\right]_x\right)\}_n\text{が増加列より定理 7.31}\\&=\lim_{n\to\infty}m_{p+q}\left(E_n^k\cap Z_k\right)\quad\because\text{条件}\\&=m_{p+q}\left(\lim_n E_n^k\cap Z_k\right)\quad\because\text{単調極限定理}\end{aligned}$$
なので、$\lim_n E_n^k\in M_3^k$ であり、M_3^k は単調族である。よって、定理 9.6 より $\boldsymbol{B}_{p+q}=\sigma[F]\subset M_3^k$ である。自然数 k は任意なので $\boldsymbol{B}_{p+q}\subset\bigcap_{k=1}^{\infty}M_3^k$ である。つまり、$\forall E\in\boldsymbol{B}_{p+q}$ について、任意の自然数 k に対して
$$\int_{\boldsymbol{R^p}}m_q([E\cap Z_k]_x)m_p(dx)=m_{p+q}\left(E\cap Z_k\right)$$
が成立する。これより
$$\begin{aligned}\int_{\boldsymbol{R^p}}m_q(E_x)m_p(dx)&=\int_{\boldsymbol{R^p}}m_q\left(\left[E\cap\lim_k Z_k\right]_x\right)m_p(dx)\\&=\int_{\boldsymbol{R^p}}\lim_{k\to\infty}m_q\left([E\cap Z_k]_x\right)m_p(dx)\quad\because\text{単調極限定理}\\&=\lim_{k\to\infty}\int_{\boldsymbol{R^p}}m_q\left([E\cap Z_k]_x\right)m_p(dx)\quad\because\{m_q\left([E\cap Z_k]_x\right)\}_k\text{が増加列より定理 7.31}\\&=\lim_{k\to\infty}m_{p+q}\left(E\cap Z_k\right)\\&=m_{p+q}\left(E\cap\lim_k Z_k\right)\quad\because\text{単調極限定理}\\&=m_{p+q}\left(E\right)\end{aligned}$$
が成立する。よって示された。 $\boxed{\text{証明終}}$

上の証明では、一般の測度の性質ではない、ルベーグ測度特有の性質としては矩形集合に対しては $m_{p+q}(A\times B)=m_p(A)m_q(B)$ となること、$m_p([-n,n]^p),m_q([-n,n]^q),m_{p+q}([-n,n]^{p+q})$ が有限であること（σ-有限であること）、の二つのみを使っている。今の場合は、実のところ
$$m_p(X_n)<\infty,\ \bigcup_{n=1}^{\infty}X_n=\boldsymbol{R^p}\quad m_q(Y_n)<\infty,\ \bigcup_{n=1}^{\infty}Y_n=\boldsymbol{R^q}$$
であれば、$Z_n=X_n\times Y_n$ とすれば十分である。したがって、今の補題は次のように述べてもよい。

系 9.10 $\boldsymbol{R^p}(\boldsymbol{B}_p,\mu_1)$ と $\boldsymbol{R^q}(\boldsymbol{B}_q,\mu_2)$ を σ-有限な測度空間とし、さらに測度空間 $\boldsymbol{R^{p+q}}(\boldsymbol{B}_{p+q},\mu)$ が定義されていて、矩形集合 $A\times B\in\boldsymbol{B}_p\times\boldsymbol{B}_q\subset\boldsymbol{B}_{p+q}$ に対しては
$$\mu(A\times B)=\mu_1(A)\mu_2(B)$$

が成り立つとする。このとき $E \in \boldsymbol{B}_{p+q}$ ならば、$\forall x \in \boldsymbol{R^p}$ に対して $E_x \in \boldsymbol{B}_q$ であり、$\forall y \in \boldsymbol{R^q}$ に対して $E_y \in \boldsymbol{B}_p$ である。また、$\mu_2(E_x)$ は x の関数として $\boldsymbol{B}_p$ について可測、$\mu_1(E_y)$ は y の関数として $\boldsymbol{B}_q$ について可測であり

$$\int_{\boldsymbol{R^p}} \mu_2(E_x)\mu_1(dx) = \int_{\boldsymbol{R^q}} \mu_1(E_y)\mu_2(dy) = \mu(E)$$

が成立する。

ただちに拡張できる。

定理 9.11 （フビニの定理１　ボレル集合族版）$f : \boldsymbol{R^{p+q}} \to \boldsymbol{R}$ が非負 $\boldsymbol{B}_{p+q}$-可測関数であるとき、$\forall x \in \boldsymbol{R^p}$ に対して $f_x(y) \equiv f(x, y)$ は y の $\boldsymbol{B}_p$-可測関数であり、$\forall y \in \boldsymbol{R^q}$ に対して $f_y(x) \equiv f(x, y)$ は x の $\boldsymbol{B}_q$-可測関数である。また、$\boldsymbol{R^n}$ に対するルベーグ測度を m_n として、$\int_{\boldsymbol{R^q}} f(x, y)m_q(dy)$ は x の $\boldsymbol{B}_p$-可測関数、$\int_{\boldsymbol{R^p}} f(x, y)m_p(dx)$ は y の $\boldsymbol{B}_q$-可測関数であり

$$\int_{\boldsymbol{R^p}} \left(\int_{\boldsymbol{R^q}} f(x, y)m_q(dy) \right) m_p(dx) = \int_{\boldsymbol{R^q}} \left(\int_{\boldsymbol{R^p}} f(x, y)m_p(dx) \right) m_q(dy) = \int_{\boldsymbol{R^{p+q}}} f(z)m_{p+q}(dz)$$

が成立する。また、f が可積分の時も同じことが成立する。

(proof)

$f_x(y)$ が y の $\boldsymbol{B}_p$-可測関数であることについて。まず、f が定義関数のとき、つまり $f(x, y) = I((x, y); E)$ のときを考える。$\boldsymbol{B}_{p+q}$-可測関数であるので、$f^{-1}([1, 1]) = E \in \boldsymbol{B}_{p+q}$ が必要である。任意の $x \in \boldsymbol{R^p}$ を固定したとき、$(x, y) \in E \iff y \in E_x$ なので $f_x(y) = I(y; E_x)$ である。$E \in \boldsymbol{B}_{p+q}$ から直前の補題より $E_x \in \boldsymbol{B}_q$ なので、任意の $A \in \boldsymbol{B}_1$ に対して

$$f_x^{-1}(A) = \begin{cases} E_x \in \boldsymbol{B}_q & 1 \in A \\ \emptyset \in \boldsymbol{B}_q & 1 \notin A \end{cases}$$

であり、定理 6.1 より f_x は $\boldsymbol{B}_q$-可測関数である。f が単関数であるときは、定義関数の有限個の線形結合なので、定理 6.4 よりやはり $\boldsymbol{B}_q$-可測関数である。f が一般の非負 $\boldsymbol{B}_{p+q}$-可測関数である場合は、定理 7.15 より $\boldsymbol{B}_{p+q}$ についての近似単関数列 $\{\varphi_n(z)\}$ を持つ。各 φ_n については、$\varphi_n^x(y) \equiv \varphi_n(x, y)$ とすれば、すでにみたことにより、φ_n^x は $\boldsymbol{B}_q$-可測関数である。したがって、定理 6.6 より $f_x(y) = \lim_{n\to\infty} \varphi_n^x(y)$ も $\boldsymbol{B}_q$-可測関数である。f_y についても同様。

$F(x) \equiv \int_{\boldsymbol{R^q}} f(x, y)m_q(dy)$ が x の $\boldsymbol{B}_p$-可測関数であることについて。まず、f が定義関数である場合は、既にみたように任意の $x \in \boldsymbol{R^p}$ を固定したとき、$f(x, y) = f_x(y) = I(y; E_x)$ であるので

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_{\boldsymbol{R^q}} I(y; E_x)m_q(dy) \\ &= m_q(E_x) \end{aligned}$$

であり、直前の補題よりこれは $\boldsymbol{B}_p$-可測関数である。f が単関数の場合は、定義関数の有限個の線形結合となっているので、積分の線形性と定理 6.4 よりやはり $\boldsymbol{B}_q$-可測関数である。f が一般の非負 $\boldsymbol{B}_{p+q}$-可測関数である場合は、定理 7.15 より $\boldsymbol{B}_{p+q}$ についての近似単関数列 $\{\varphi_n(z)\}$ を持つ。各 φ_n については、$\varphi_n^x(y) \equiv \varphi_n(x, y)$ とすれば

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_{\boldsymbol{R^q}} f(x, y)m_q(dy) \\ &= \lim_{n\to\infty} \int_{\boldsymbol{R^q}} \varphi_n(z)m_q(dy) \quad \because \text{定理 } 7.19 \end{aligned}$$

であり、すでに見たことより $\int_{\boldsymbol{R^q}} \varphi_n(z)m_q(dy)$ は $\boldsymbol{B}_p$-可測関数なので、定理 6.6 より $F(x)$ も $\boldsymbol{B}_q$-可測関数である。$\int_{\boldsymbol{R^p}} f(x,y)m_p(dx)$ についても同様。

$$\int_{\boldsymbol{R^p}}\left(\int_{\boldsymbol{R^q}} f(x,y)m_q(dy)\right)m_p(dx) = \int_{\boldsymbol{R^q}}\left(\int_{\boldsymbol{R^p}} f(x,y)m_p(dx)\right)m_q(dy) = \int_{\boldsymbol{R^{p+q}}} f(z)m_{p+q}(dz)$$

についても、f が定義関数の場合は、直前の補題によって示されており、上と同様に、線形性で単関数へ拡張し、定理 7.19 で非負可測関数へと拡張すればよい。

最後に、f が可積分関数である場合は、$f = f^+ - f^-$ と二つの非負可測関数 f^+, f^- の線形結合として表されるので、線形性を用いて示せばよい。 証明終

同様にして、次も示される。

定理 9.12 $\boldsymbol{R^p}(\boldsymbol{B}_p, \mu_1)$ と $\boldsymbol{R^q}(\boldsymbol{B}_q, \mu_2)$ を σ-有限な測度空間とし、さらに測度空間 $\boldsymbol{R^{p+q}}(\boldsymbol{B}_{p+q}, \mu)$ が定義されていて、矩形集合 $A \times B \in \boldsymbol{B}_p \times \boldsymbol{B}_q \subset \boldsymbol{B}_{p+q}$ に対しては

$$\mu(A \times B) = \mu_1(A)\mu_2(B)$$

が成り立つとする。$f : \boldsymbol{R^{p+q}} \to \boldsymbol{R}$ が非負 $\boldsymbol{B}_{p+q}$-可測関数であるとき、$\forall x \in \boldsymbol{R^p}$ に対して $f_x(y) \equiv f(x,y)$ は y の $\boldsymbol{B}_p$-可測関数であり、$\forall y \in \boldsymbol{R^q}$ に対して $f_y(x) \equiv f(x,y)$ は x の $\boldsymbol{B}_q$-可測関数である。また、$\boldsymbol{R^n}$ に対するルベーグ測度を m_n として、$\int_{\boldsymbol{R^q}} f(x,y)\mu_2(dy)$ は x の $\boldsymbol{B}_p$-可測関数、$\int_{\boldsymbol{R^p}} f(x,y)\mu_1(dx)$ は y の $\boldsymbol{B}_q$-可測関数であり

$$\int_{\boldsymbol{R^p}}\left(\int_{\boldsymbol{R^q}} f(x,y)\mu_2(dy)\right)\mu_1(dx) = \int_{\boldsymbol{R^q}}\left(\int_{\boldsymbol{R^p}} f(x,y)\mu_1(dx)\right)\mu_2(dy) = \int_{\boldsymbol{R^{p+q}}} f(z)\mu(dz)$$

が成立する。また、f が可積分の時も同じことが成立する。

9.2.3 ルベーグ測度空間への拡張

補題 9.13 $\boldsymbol{R^n}(\mathfrak{B}_n, m_n)$ をルベーグ測度空間とする。$E \in \mathfrak{B}_{p+q},\ m_n(E) = 0$ ならば、ほとんどいたる $x \in \boldsymbol{R^p}$ に対して $E_x \in \mathfrak{B}_q$ で $m_q(E_x) = 0$ であり、ほとんどいたる $y \in \boldsymbol{R^q}$ に対して $E_y \in \mathfrak{B}_p$ で $m_p(E_x) = 0$ となる。

(proof)
定理 5.11 より、E には等測包 G が存在する。$E \subset G$ はボレル集合であり、$m_{p+q}(G) = 0$ を満たす。定理 9.9 より G_x もボレル集合であり $\int_{\boldsymbol{R^q}} m_q(G_x) \leq m_{p+q}(G) = 0$ である。よって、定理 8.4 よりほとんどいたる $x \in \boldsymbol{R^p}$ に対して $m_q(G_x) = 0$ である。$E_x \subset G_x$ であり、ルベーグ測度空間は完備測度空間なので、零集合の部分集合は可測であり零集合となる、すなわち、ほとんどいたる $x \in \boldsymbol{R^p}$ に対して $E_x \in \mathfrak{B}_q$ で $m_q(E_x) = 0$ である。E_y についても同様。 証明終

補題 9.14 $\boldsymbol{R^n}(\mathfrak{B}_n, m_n)$ をルベーグ測度空間とする。$E \in \mathfrak{B}_{p+q}$ ならば、ほとんどいたる $x \in \boldsymbol{R^p}$ に対して $E_x \in \mathfrak{B}_q$ であり、ほとんどいたる $y \in \boldsymbol{R^q}$ に対して $E_y \in \mathfrak{B}_p$ である。ま

た、$m_q(E_x)$ は x の関数としてルベーグ可測関数、$m_p(E_y)$ は y の関数としてルベーグ可測関数であり

$$\int_{\boldsymbol{R^p}} m_q(E_x)m_p(dx) = \int_{\boldsymbol{R^q}} m_p(E_y)m_q(dy) = m_{p+q}(E)$$

が成立する。

(proof)

$E \in \mathfrak{B}_{p+q}$ から定理 5.12 よりボレル集合 G と零集合 N によって $E = G - N = G \cap N^c$ とあらわされる。このとき

$$E_x = G_x \cap (N^c)_x = G_x \cap (N_x)^c = G_x \cap (N_x)^c = G_x - N_x$$

であり、定理 9.13 より、ほとんどいたる $x \in \boldsymbol{R^p}$ に対して N_x は可測で $m_q(N_x) = 0$ であり、また、補題 9.9 より G_x はボレル集合であり、したがって可測集合であることから、ほとんどいたる $x \in \boldsymbol{R^p}$ に対して $E_x \in \mathfrak{B}_q$ である。E_y についても同様。

ほとんどいたるところ定義された関数 $F(x) \equiv m_q(E_x)$ について

$$\begin{aligned} F(x) &= m_q(E_x) \\ &= m_q(G_x - N_x) \\ &= m_q(G_x) - m_q(N_x) \\ &= m_q(G_x) \end{aligned}$$

であり、補題 9.9 より $m_q(G_x)$ は $\boldsymbol{B}_p$-可測関数であるので、$F(x) = m_q(E_x)$ はルベーグ可測関数である。そして

$$\begin{aligned} \int_{\boldsymbol{R^p}} m_q(E_x)m_p(dx) &= \int_{\boldsymbol{R^p}} m_q(G_x)m_p(dx) \\ &= m_{p+q}(G) \\ &= m_{p+q}(E) \end{aligned}$$

が成立する。E_y についても同様。 $\boxed{\text{証明終}}$

これに対して、補題 9.9 からフビニの定理 1（定理 9.11）を導いた時と同様にして、次の定理を証明できる。

定理 9.15 （フビニの定理 2　ルベーグ測度空間版）$f : \boldsymbol{R^{p+q}} \to \boldsymbol{R}$ が非負ルベーグ可測関数であるとき、$\forall x \in \boldsymbol{R^p}$ に対して $f_x(y) \equiv f(x, y)$ は y のルベーグ可測関数であり、$\forall y \in \boldsymbol{R^q}$ に対して $f_y(x) \equiv f(x, y)$ は x のルベーグ可測関数である。また、$\boldsymbol{R^n}$ に対するルベーグ測度を m_n として、$\int_{\boldsymbol{R^q}} f(x, y)m_q(dy)$ は x のルベーグ可測関数、$\int_{\boldsymbol{R^p}} f(x, y)m_p(dx)$ は y のルベーグ可測関数であり

$$\int_{\boldsymbol{R^p}} \left(\int_{\boldsymbol{R^q}} f(x, y)m_q(dy) \right) m_p(dx) = \int_{\boldsymbol{R^q}} \left(\int_{\boldsymbol{R^p}} f(x, y)m_p(dx) \right) m_q(dy) = \int_{\boldsymbol{R^{p+q}}} f(z)m_{p+q}(dz)$$

が成立する。また、f が可積分の時も同じことが成立する。

10　測度変換

10.1　ラドン・ニコディム導関数

定義 10.1 同じ集合 X によって二つの測度空間 $X(\mathfrak{B}_m, m), X(\mathfrak{B}_\mu, \mu)$ が定義されており、$\mathfrak{B}_m \subset \mathfrak{B}_\mu$ であるとする。このとき任意の $A \in \mathfrak{B}_m$ $(\in \mathfrak{B}_\mu)$ について、可測関数 $\dfrac{dm}{d\mu}$ が存在して

$$m(A) = \int_A \frac{dm}{d\mu}(x)\mu(dx)$$

となるとき、$\dfrac{dm}{d\mu}$ を**ラドン・ニコディム導関数（ラドン・ニコディム微分）**という。◂

ラドン・ニコディム導関数を考える場合、基本的には、可測性は $\mathfrak{B}_\mu$ についても可測となる、$\mathfrak{B}_m$ について言っていると考える。また、定理 8.2 より μ についての零集合は m についても零集合であるので、$a.e.$ は μ についてであると考える（つまり m についても $a.e.$ で成立する）。

定理 10.1 ラドン・ニコディム導関数は、ほとんどいたるところ等しいものを同一視するとして、一意である。

(proof)

二つのラドン・ニコディム導関数 f, g が存在したとすると、任意の $A \in \mathfrak{B}_m$ $(\in \mathfrak{B}_\mu)$ について、

$$\int_A f(x)\mu(dx) = m(A) = \int_A g(x)\mu(dx)$$

である。定理 6.3 より $E\{f \leq g\} = \{x; f(x) \leq g(x)\}$ や $E\{f > g\} = \{x; f(x) > g(x)\}$ が可測なので

$$0 = \int_{E\{f \leq g\}} f(x) - g(x)\mu(dx) = \int_A -|f(x) - g(x)|\mu(dx)$$
$$0 = \int_{E\{f > g\}} f(x) - g(x)\mu(dx) = \int_A |f(x) - g(x)|\mu(dx)$$

であるので、定理 8.5 より $f = g \quad a.e.$ である。 証明終

定理 10.2 二つの測度空間 $X(\mathfrak{B}_m, m), X(\mathfrak{B}_\mu, \mu)$ $s.t.$ $\mathfrak{B}_m \subset \mathfrak{B}_\mu$ について、$\dfrac{dm}{d\mu}$ をラドン・ニコディム導関数とする。このとき可測関数 f について

$$\int_A f(x)m(dx) = \int_A f(x)\frac{dm}{d\mu}(x)\mu(dx)$$

となる。

(proof)

まず f が単関数である場合を考える。このとき、可測集合列 $\{E_i\}$ によって $f(x) = \sum_i \alpha_i I(x; E_i)$ と表わされるので

$$\begin{aligned}
\int_A f(x)m(dx) &= \sum_i \alpha_i m(E_i \cap A) \\
&= \sum_i \alpha_i \int_{E_i \cap A} \frac{dm}{d\mu}(x)\mu(dx) \quad \because \text{ラドン・ニコディム微分の定義} \\
&= \sum_i \alpha_i \int_A I(x; E_i)\frac{dm}{d\mu}(x)\mu(dx) \quad \because \text{定理 7.34} \\
&= \int_A \left\{\sum_i \alpha_i I(x; E_i)\right\} \frac{dm}{d\mu}(x)\mu(dx) \\
&= \int_A f(x)\frac{dm}{d\mu}(x)\mu(dx)
\end{aligned}$$

である。よって単関数の場合は示された。f が非負可測関数の場合は、定理 7.19 より近似単関数列の積分の極限として表されるので、この場合も成立する。f が一般の可測関数の場合も、線形性より成立する。よって示された。 証明終

このように、ラドン・ニコディム導関数という可測関数が存在すれば、ある測度での積分を別の測度での積分に書き換えることができる。ラドン・ニコディム導関数によって、積分に用いる測度を変えることを**測度変換**という。

10.2 積分による新たな測度の定義

定理 10.3 測度空間 $X(\mathfrak{B},m)$ において、任意の非負可測関数 f に対して、集合関数 $\mu_f:\mathfrak{B}\to\boldsymbol{R}\cup\{\infty\}$ を

$$\mu_f(A)\equiv\int_A f(x)m(dx)$$

と定義すると、$X(\mathfrak{B},\mu_f)$ は測度空間である。

(proof)

補題 7.9 より非負性が、定理 7.30 より加算加法性が示される。また、測度の定義より空集合が零集合であり、定理 8.2 より $\mu_f(\emptyset)=0$ が示される。よって、μ_f は測度の要件を満たしている。 証明終

このとき非負関数 f がラドン・ニコディム導関数になることは言うまでもない。つまり、すでに測度空間があれば、非負可測関数をもってくることで、測度変換と新たな測度が定義されることになる。

10.3 絶対連続

定義 10.2 同じ集合 X によって二つの測度空間 $X(\mathfrak{B}_m,m),X(\mathfrak{B}_\mu,\mu)$ が定義されており、$\mathfrak{B}_m\subset\mathfrak{B}_\mu$ であるとする。このとき

$$\forall N\in\mathfrak{B}_m,\mu(N)=0\quad\Rightarrow\quad m(N)=0$$

が成り立つことを、m は μ に関して**絶対連続**であるといい、$m\ll\mu$ と表す。$m\ll\mu\ and\ \mu\ll m$ であるときは、m,μ は互いに絶対連続であるという。また

$$\exists N\in\mathfrak{B}_m,\mu(N)=0,m(N)=1$$

となることを m と μ は**特異**であるといい、$m\perp\mu$ と表す。$\mathfrak{B}_m=\mathfrak{B}_\mu$ ならば $m\perp\mu\ \Leftrightarrow\ \mu\perp m$ つまり対称的である。◂

ラドン・ニコディム導関数によって $m(A)=\displaystyle\int_A\frac{dm}{d\mu}(x)\mu(dx)$ と表されている場合は、定理 8.2 より $m\ll\mu$ である。逆が成り立つ場合が気になることになる。それに解答を与えるのがラドン・ニコディムの定理である。

10.4 ラドン・ニコディムの定理

ラドン・ニコディムの定理を証明する。L^2-空間を利用して証明する。容易でないので、準備を要する。

定義 10.3 同じ集合 X によって二つの測度空間 $X(\mathfrak{B}_m,m),X(\mathfrak{B}_\mu,\mu)$ が定義されており、$\mathfrak{B}_m\subset\mathfrak{B}_\mu$ であるとする。このとき和の測度として $(m+\mu):\mathfrak{B}_m\to\boldsymbol{R}\cup\infty$ を

$$(m+\mu)(A)\equiv m(A)+\mu(A)$$

と定義すると、容易に $(m+\mu)$ は測度であることがわかり、$X(\mathfrak{B}_m,(m+\mu))$ は測度空間となる。◂

定理 10.4 同じ集合 X によって二つの測度空間 $X(\mathfrak{B}_m, m), X(\mathfrak{B}_\mu, \mu)$ が定義されており、$\mathfrak{B}_m \subset \mathfrak{B}_\mu$ であるとする。このとき

$$\int_A f(x)(m+\mu)(dx) = \int_A f(x)m(dx) + \int_A f(x)\mu(dx)$$

となる。

(proof)
f が単関数の場合はほぼ明らか。f が非負可測関数の場合は、定理 7.19 より近似単関数列の積分の極限として表されるので、この場合も成立する。f が一般の可測関数の場合も、線形性より成立する。よって示された。 証明終

補題 10.5 同じ集合 X によって二つの有界な測度空間 $X(\mathfrak{B}_m, m), X(\mathfrak{B}_\mu, \mu)$ が定義されており、$\mathfrak{B}_m \subset \mathfrak{B}_\mu$ であるとする。このとき、測度 $(m+\mu)$ について二乗可積分な関数 f について

$$\int_X f(x)m(dx) \leq \sqrt{m(X)+\mu(X)}\sqrt{\int_X |f(x)|^2(m+\mu)(dx)} < \infty$$

となる。

(proof)
$(f,g)_{m+\mu}$ を測度 $m+\mu$ による L^2-空間の内積として

$$\begin{aligned}
\int_X f(x)m(dx) &\leq \int_X 1\cdot f(x)(m+\mu)(dx) \quad \because \text{直前の定理} \\
&= (1,f)_{m+\mu} \leq \|1\|_{m+\mu}\ \|f\|_{m+\mu} \quad \because \text{シュヴァルツの不等式} \\
&= \sqrt{\int_X 1(m+\mu)(dx)}\sqrt{\int_X |f(x)|^2(m+\mu)(dx)} \\
&= \sqrt{m(X)+\mu(X)}\sqrt{\int_X |f(x)|^2(m+\mu)(dx)} \qquad (45) \\
&< \infty \quad \because m, f \text{ が二乗可積分}
\end{aligned}$$

である。よって示された。 証明終

系 10.6 有界な測度空間 $X(\mathfrak{B}_m, m)$ について、二乗可積分な関数は可積分関数である。

(proof)
直前の補題において、$\mathfrak{B}_\mu = \mathfrak{B}_m, \mu(A) = 0$ とすればよい。 証明終

補題 10.7 同じ集合 X によって二つの有界な測度空間 $X(\mathfrak{B}_m, m), X(\mathfrak{B}_\mu, \mu)$ が定義されており、$\mathfrak{B}_m \subset \mathfrak{B}_\mu$ で $m \ll \mu$ であるとする。このとき、測度 $m+\mu$ について二乗可積分な任意の関数 f に対して

$$\int_X f(x)(1-g(x))m(dx) = \int_X f(x)g(x)\mu(dx)$$

となる、$0 \leq g(x) < 1$ なる測度 $m+\mu$ について二乗可積分な関数 g が存在する。

(proof)

測度 $(m+\mu)$ についての L^2-空間を $L^2(m+\mu)$ と表すことにする。ここで汎関数 $L: L^2(m+\mu) \to \boldsymbol{R}$ を

$$L[f] \equiv \int_X f(x)m(dx)$$

と定義すると、積分の線形性より線形汎関数となる。また、$f \in L^2(m+\mu)$ について、つまり、測度 $(m+\mu)$ について二乗可積分な関数 f については、直前の補題より

$$L[f] = \int_X f(x)m(dx) \leq \sqrt{m(X)+\mu(X)}\|f\|_{(m+\mu)} < \infty$$

であり、L は有界な線形汎関数である。よって、定理 D.3 より、L は連続な線形汎関数でもある。このとき、リースの定理 E.14 が使えて、L に対して一意的に $h_0 \in L^2(m+\mu)$ が存在して、任意の $f \in L^2(m+\mu)$ について

$$\begin{aligned} L[f] &= (f, h_0)_{(m+\mu)} \\ &= \int_X f(x)h_0(x)(m+\mu)(dx) \\ \int_X f(x)m(dx) &= \int_X f(x)h_0(x)m(dx) + \int_X f(x)h_0(x)\mu(dx) \text{ 定理 } 10.4 \end{aligned}$$

と表される。よって

$$\int_X f(x)(1-h_0(x))m(dx) = \int_X f(x)h_0(x)\mu(dx) \tag{46}$$

である。ここで、$f(x) = I(x; h_0(x) \leq 0)(\geq 0)$ とすると

$$\begin{aligned} 0 \leq L[f] &= \int_X f(x)h_0(x)(m+\mu)(dx) \\ &= \int_X I(x; h_0(x) \leq 0)h_0(x)(m+\mu)(dx) \leq 0 \end{aligned}$$

より

$$\int_X |-I(x; h_0(x) \leq 0)h_0(x)|(m+\mu)(dx) = 0$$

つまり、$I(x; h_0(x) \leq 0)h_0(x) = 0 \quad a.e.$(測度 $(m+\mu)$ について) である。よって、$h_0(x) \geq 0 \quad a.e.$(測度 $(m+\mu)$ について) である。このとき、測度 m についても μ についても $h_0(x) \geq 0 \quad a.e.$ である。

また、$H = \{x \in X; h_0(x) \geq 1\}$ として $f(x) = I(x; H)$ とすると h_0 は測度 $(m+\mu)$ について可測関数なので、補題 6.3 より H も測度 $(m+\mu)$ について可測であり、当然 μ についても可測である。そして

$$\begin{aligned} 0 \leq \mu(H) &= \int_X f(x)\mu(dx) \\ &\leq \int_X f(x)h_0(x)\mu(dx) \quad \because x \in H \;\to\; h_0(x) \geq 1 \\ &= \int_X f(x)(1-h_0(x))m(dx) \quad \because \text{式 } (46) \\ &\leq 0 \quad \because x \in H \;\to\; 1-h_0(x) \leq 0 \end{aligned}$$

より、$\mu(H) = 0$ であり、$h_0(x) < 1 \quad a.e.$(測度μについて) となっている。上と合わせると、$0 \leq h_0(x) < 1 \quad a.e.$(測度$\mu$について) となっている。これは、ある $\mu(N) = 0$ なる N が存在して $x \in N^c$ のとき $0 \leq h_0(x) < 1$ であることを意味している。

$$g(x) = \begin{cases} h_0(x) & x \in N^c \\ 0 & x \in N \end{cases}$$

と定義すれば $0 \leq g(x) < 1$ であり、$h_0 = g \quad a.e.$(測度μについて) となる。ここで、絶対連続性を使うと $m \ll \mu$ より $m(N) = 0$ であることもわかる。つまり $h_0 = g \quad a.e.$(測度 m について) も成り立っている。これを式 (46) に適用すれば

$$\int_X f(x)(1 - g(x))m(dx) = \int_X f(x)g(x)\mu(dx)$$

である。よって示された。 $\boxed{\text{証明終}}$

定理 10.8 （有界な場合のラドン・ニコディムの定理）同じ集合 X によって二つの有界[19]な測度空間 $X(\mathfrak{B}_m, m), X(\mathfrak{B}_\mu, \mu)$ が定義されており、$\mathfrak{B}_m \subset \mathfrak{B}_\mu$ で $m \ll \mu$ であるとする。このとき可積分なラドン・ニコディム導関数 $\dfrac{dm}{d\mu}$ が存在する。

(proof)

直前の補題によって測度 $(m + \mu)$ について二乗可積分である $0 \leq g(x) < 1$ なる関数 g が存在する。f を有界な可測関数とする。有界なので $f(x) < M < \infty$ なる数 M が存在する。また、任意の自然数 n に対して $0 \leq (g(x))^n < 1$ なので、m, μ の有界性から

$$\int_X \{(g(x))^n f(x)\}^2 (m + \mu)(dx) < \int_X M^2 (m + \mu)(dx) < M^2 (m + \mu)(X) = M^2 m(X) + M^2 \mu(X) < \infty$$

である。つまり、$g^n f$ は測度 $(m + \mu)$ について二乗可積分であり、その線形結合である

$$\frac{1 - (g(x))^n}{1 - g(x)} f(x) = \{1 + g(x) + (g(x))^2 + \cdots + (g(x))^{n-1}\} f(x)$$

も二乗可積分である。これに対して直前の補題を適用すると

$$\begin{aligned}
\int_X \frac{1 - (g(x))^n}{1 - g(x)} f(x)(1 - g(x))m(dx) &= \int_X \frac{1 - (g(x))^n}{1 - g(x)} f(x)g(x)\mu(dx) \\
\int_X \{1 - (g(x))^n\} f(x)m(dx) &= \int_X \frac{1 - (g(x))^n}{1 - g(x)} f(x)g(x)\mu(dx)
\end{aligned}$$

となる。系 10.6 より $\dfrac{1 - (g(x))^n}{1 - g(x)} f(x)$ は有界な測度 $(m + \mu)$ について可積分であり、したがって、測度 μ について可積分である。よって

$$\left| \frac{1 - (g(x))^n}{1 - g(x)} f(x)g(x) \right| = \frac{1 - (g(x))^n}{1 - g(x)} f(x)g(x) \leq \frac{1 - (g(x))^n}{1 - g(x)} f(x)$$

と可積分関数によって押さえられるので、優収束定理より

$$\begin{aligned}
\lim_{n \to \infty} \int_X \frac{1 - (g(x))^n}{1 - g(x)} f(x)g(x)\mu(dx) &= \int_X \lim_{n \to \infty} \frac{1 - (g(x))^n}{1 - g(x)} f(x)g(x)\mu(dx) \\
&= \int_X \frac{g(x)}{1 - g(x)} f(x)\mu(dx)
\end{aligned}$$

である。また、g, f が有界なので $|\{1 - (g(x))^n\} f(x)|$ も有界であり、優収束定理より

$$\begin{aligned}
\lim_{n \to \infty} \int_X \{1 - (g(x))^n\} f(x)m(dx) &= \int_X \lim_{n \to \infty} \{1 - (g(x))^n\} f(x)m(dx) \\
&= \int_X f(x)m(dx)
\end{aligned}$$

[19] $m(X), \mu(X) < +\infty$ を意味する。

となる。したがって

$$\begin{aligned}\int_X f(x)m(dx) &= \lim_{n\to\infty}\int_X \{1-(g(x))^n\}f(x)m(dx)\\ &= \lim_{n\to\infty}\int_X \frac{1-(g(x))^n}{1-g(x)}f(x)g(x)\mu(dx)\\ &= \int_X \frac{g(x)}{1-g(x)}f(x)\mu(dx)\end{aligned}$$

である。ここで $\dfrac{dm}{d\mu}(x)=\dfrac{g(x)}{1-g(x)}$ とおき、有界な関数として $f(x)=I(x;A)$ を代入すると

$$\begin{aligned}m(A) &= \int_X f(x)m(dx)\\ &= \int_X \frac{dm}{d\mu}(x)I(x;A)\mu(dx)\\ &= \int_A \frac{dm}{d\mu}(x)\mu(dx) \quad \because \text{定理 } 7.34\end{aligned}$$

となる。$m(X)<\infty$ を考えれば、可積分であることが分かる。一意性は明らか。よって示された。 証明終

これは、もう少し拡張することができる。

定義 10.4 測度空間 $X(\mathfrak{B},m)$ が σ-有限であるとは

$$\begin{aligned}m(E_n) &< \infty\\ E_n &\subset E_{n+1} \quad (\text{増加列})\\ X &= \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\end{aligned}$$

を満たすある可測集合列 $\{E_n\}$ が存在することをいう。◂

例えば、ルベーグ測度空間 $\boldsymbol{R}(\boldsymbol{B}_1,m)$ は $A_n=[-n,n]$ を以て σ-有限である。

定理 10.9 （ラドン・ニコディムの定理）同じ集合 X によって σ-有限な測度空間 $X(\mathfrak{B}_m,m)$ と σ-有限な測度空間 $X(\mathfrak{B}_\mu,\mu)$ が定義されており、$\mathfrak{B}_m\subset\mathfrak{B}_\mu$ で $m\ll\mu$ であるとする。このときラドン・ニコディム導関数 $\dfrac{dm}{d\mu}$ が存在する。

(proof)
$X(\mathfrak{B}_\mu,\mu)$ が σ-有限であることより

$$\begin{aligned}\mu(A_n) &< \infty\\ A_n &\subset A_{n+1} \quad (\text{増加列})\\ X &= \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\end{aligned}$$

なるある可測集合列 $\{A_n\}$ が存在する。同様に、$X(\mathfrak{B}_m,m)$ が σ-有限であることより

$$\begin{aligned}m(B_n) &< \infty\\ B_n &\subset B_{n+1} \quad (\text{増加列})\\ X &= \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\end{aligned}$$

なるある可測集合列 $\{B_n\}$ が存在する。このとき、$E_n \equiv A_n \cap B_n$ と定義する。k を任意の自然数として

$$\begin{aligned}
\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n &= \bigcup_{n=1}^{\infty} (A_n \cap B_n) \\
&\supset \bigcup_{n=1}^{\infty} (A_n \cap B_k) \\
&= \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \right) \cap B_k \because \text{一般化分配則} \\
&= B_k = \bigcup_{n=1}^{k} B_n
\end{aligned}$$

である。よって $k \to \infty$ とすることにより

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n = X$$

であるとわかる。また

$$\begin{aligned}
\mu(E_n) \le \mu(A_n) < \infty \\
m(E_n) \le m(B_n) < \infty \\
E_n \subset E_{n+1} \quad (\text{増加列})
\end{aligned}$$

である。$F_n \equiv E_n - E_{n-1},\ F_1 = E_1$ とおくと、これも可測集合列で

$$\begin{aligned}
\mu(F_n) < \infty \\
m(F_n) < \infty \\
X = \sum_{n=1}^{\infty} F_n
\end{aligned}$$

となる。このとき

$$A = A \cap X = A \cap \left(\sum_{n=1}^{\infty} F_n \right) = \sum_{n=1}^{\infty} (A \cap F_n)$$

であり、$A \in \mathfrak{B}_m$ について

$$\begin{aligned}
m(A) &= \int_A 1m(dx) \\
&= \int_{\sum_{n=1}^{\infty}(A \cap F_n)} 1m(dx) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \int_{A \cap F_n} 1m(dx) \quad \because \text{定理 } 7.30 \\
&= \lim_{N \to \infty} \sum_{n=1}^{N} \int_{A \cap F_n} 1m(dx)
\end{aligned}$$

となる。定理 7.20 より $\int_{A \cap F_n} 1m(dx)$ は定理 2.1 の方法で得られた μ, m いずれについても有界な測度空間 E_N 上の積分と考えてよい。したがって、これに対しては直前の有界な測度空間に対するラドン・ニコディムの定理が適用できるので、可積分なラドン・ニコディム導関数 $\left.\dfrac{dm}{d\mu}\right._N (x)$ が、ほとんど至るところ等しいものを同一視するとして、一意に存在する。ゆえに $E_N \subset E_{N+1}$ なので、$x \in E_N$ では $\left.\dfrac{dm}{d\mu}\right._N (x) = \left.\dfrac{dm}{d\mu}\right._{N+1} (x) \quad a.e.$ である。$\left.\dfrac{dm}{d\mu}\right._N (x)$ は $E_{N+1} - E_N = F_{N+1}$ に対しては定義されていないので、ここを $x \in F_{N+1}$ に対して

$\dfrac{dm}{d\mu}_N(x) = \dfrac{dm}{d\mu}_{N+1}(x)$ と定義すれば、

$$\frac{dm}{d\mu}_1(x) = \frac{dm}{d\mu}_2(x) = \cdots = \frac{dm}{d\mu}_N(x) = \cdots \quad a.e.$$

となる。したがって、この極限はほとんど至るところ等しいものを同一視するとして（つまり、測度 μ についての L^1 の元として）一意に収束する。この極限を $\dfrac{dm}{d\mu}$ とすれば

$$\begin{aligned}
m(A) &= \lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N}\int_{A\cap F_n} 1m(dx) \\
&= \lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N}\int_{A\cap F_n} \frac{dm}{d\mu}_N(x)\mu(dx) \\
&= \lim_{N\to\infty}\int_{A\cap E_N} \frac{dm}{d\mu}_N(x)\mu(dx) \\
&= \lim_{N\to\infty}\int_{A} \frac{dm}{d\mu}_N(x)I(x;E_N)\mu(dx) \quad \because \text{定理 } 7.34 \\
&= \int_{A} \lim_{N\to\infty}\frac{dm}{d\mu}_N(x)I(x;E_N)\mu(dx) \quad \because \text{可積分であることから優収束定理} \\
&= \int_{A} \frac{dm}{d\mu}(x)\mu(dx)
\end{aligned}$$

となる。よって示された。 $\boxed{\text{証明終}}$

第 III 部
確率

11　確率測度

11.1　確率測度

定義 11.1 測度空間 $\Omega(\mathfrak{B}, P)$ が**確率測度空間**であるとは、$P(\Omega) = 1$ となることを言い、このとき測度 P を**確率測度**という。明らかに、確率測度は有界な測度である。◂

まず、全事象・標本空間に相当するのが Ω であり、それぞれの事象はその部分集合として表現される。可測性を表す加算加法族 $\mathfrak{B}$ は、事象のうち、確率がわかる事象の全体を表している。詳細に入る前に、確率と測度の対応について、見通しを良くするため、主なものを先にまとめておく。

確率	測度
全事象・標本空間	Ω
事象 A	$A(\subset \Omega)$
確率の定義された事象	可測集合
事象 A の確率	$P(A)$
確率変数	可測関数
確率変数 X の期待値 $E[X]$	積分 $\int_\Omega X(\omega)P(dx)$
（確率）密度関数	ラドン・ニコディム導関数

一度、確率を測度だと認めてしまえば、当然ながら確率測度に対しては、**すでに見た測度の議論が使える**。また、特に有界な測度空間であることより、収束の極限[20]などの扱いが楽になり、ラドン・ニコディムの定理を使う余地があることも分かる。

11.1.1　一般の有界な測度空間との対応

一般の有界な測度空間 $X(\mathfrak{B}, m),\ m(X) < \infty$ に対して、有限の定数 $m(X)$ によって $P_m(A) = \dfrac{m(A)}{m(X)}$ とおくと、測度空間 $X(\mathfrak{B}, P_m)$ は確率測度空間となる。したがって、一般の有界測度空間については、定数倍によって容易に確率測度空間の議論に帰着できる。その意味で、有界な測度空間については、確率測度空間さえ議論していれば十分とも言える。

11.1.2　確率を測度として扱うことの正当性について

定理 11.1 集合 Ω とその部分集合から成る加算加法族 $\mathfrak{B}$ が与えられたとき

$$\text{集合関数 } P : \mathfrak{B} \to \boldsymbol{R} \cup \{\infty\}$$

が、以下の条件

1. $A \in \mathfrak{B}$ に対し $0 \leq P(A) \leq 1$

2. $P(\Omega) = 1$

[20] 単調収束定理やファトゥーの補題、収束集合列の極限に関する定理 2.14 においては、ある測度の値が有界であることを条件としている。

3. $\boxed{\textbf{加算加法性}}$　互いに共通部分の無い集合列 $A_1, \cdots \in \mathfrak{B}$ に対し

$$P\left(\sum_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) \tag{47}$$

を満たすことと、$\Omega(\mathfrak{B}, P)$ が確率測度空間であることは同値である。

(proof)

定理の条件を満たすときについては、$P(\emptyset) = 0$ を証明すればこの定理は証明される。$0 < P(\emptyset) < \infty$ と仮定すると、$P(\emptyset) < \sum_{n=1}^{\infty} P(\emptyset)$ である。ところが、$\sum_{n=1}^{\infty} \emptyset = \emptyset$ なので、可算加法性より

$$P(\emptyset) = \sum_{n=1}^{\infty} P(\emptyset)$$

となり、仮定に矛盾する。したがって、条件 1. と合わせて $P(\emptyset) = 0$ である。逆は明らか。 証明終

直前の定理や定理 1.8 などを考慮すると、確率 P を確率測度によって表現することは、以下のことを前提することに相当する。

1. 確率は 0 から 1 までの実数で表現され、全事象の確率は 1 である。
2. 確率を考えてよい事象に対して、その補事象の確率を考えることができる。
3. 確率を考えてよい二つの事象に対して、その共通部分の確率を考えることができる。
4. 確率を考えてよい可算個の背反の事象の列 $\{A_n\}$ に対して、その和集合 $\sum_{n=1}^{\infty} A_n$ の確率を考えることができて、それは、それぞれの事象の確率の無限級数

$$P\left(\sum_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$$

となる。

もっとも特徴的なのは、やはり 4. であろう。これは直観的というより自然という方がふさわしい。つまり、排反事象 A, B に対して、その和集合 $A + B$ はどちらかが起こる確率を表しており、その確率については $P(A + B) = P(A) + P(B)$ となるというのは、直観的に正しいとほとんどの人が思うだろう。これから、有限個の排反事象列 $\{A_1, \cdots, A_N\}$ について

$$P\left(\sum_{n=1}^{N} A_n\right) = \sum_{n=1}^{N} P(A_n)$$

が導かれる。今のこの議論の裏には、中高で習うような、ラプラス型の、組み合わせ論的確率論があるわけであるが、その組み合わせ論的確率論の主要な弱点の一つに、無限を扱うのが困難なことがある。これを数学的に厳密に扱いたいというところから、20 世紀になって、コルモゴロフが既に発展してきていた測度論を用いることを考え出したのであり、上の有限個の排反事象列の場合を、自然な拡張として可算無限の場合まで成立すること、つまり可算加法性を前提し、議論を展開したのである。

正当性のもう一つの検証の方法として、確率として認められている別の定義を含んでいるかどうかを見る方法が考えられる。確率として認められている定義としては、以下のようなものが知られている

1. **ラプラスによる組み合わせ論的確率論**
   N 個の同様に確からしい根本事象があり、事象 A に対し、それを実現するような根本事象が R 個であれば、事象 A の起こる確率は、$\dfrac{R}{N}$ である。
2. **頻度説**
   試行を N 回繰り返し、事象 A が実現した回数を n_A とすると、経験的に言って、相対頻度 $\dfrac{n_A}{N}$ は N を大きくするとある数に近づいていくようである。これを事象 A の確率と定義する。

組み合わせ論的確率論に関しては、次節以降でより詳しく述べることにする。頻度説に関しては、相対頻度がなぜ収束するかという部分は、経験則として述べられているにすぎないが、測度の公理のもとでは、**大数の法則**として証明が可能であり、そして、相対頻度が確率に一致することが示される。その詳細については大数の法則と同時にあとで述べることになる。

11.2　標本空間が加算の場合の確率測度

確率測度空間 $\Omega(\mathfrak{B}, P)$ について、標本空間 Ω が可算個である場合を考える。

定義 11.2 確率測度空間 $\Omega(\mathfrak{B}, P)$ について、$w \in \Omega$ に対して $\{w\}$ を**根本事象**という。◂

定理 11.2 加算の標本空間 $\Omega = \{\omega_n\}_{n \in \boldsymbol{N}}$ による確率測度空間 $\Omega(\mathfrak{B}, P)$ について、任意の自然数 n に対して $\{\omega_n\} \in \mathfrak{B}$ ならば、$\mathfrak{B} = 2^\Omega$ である。つまり、根本事象 $\{\omega_n\}$ $(n = 1, 2, \cdots)$ すべてに確率が定義されているならば、標本空間のすべての部分集合 $A \in 2^\Omega$ に確率が定義できる。

(proof)
$\mathfrak{B} \subset 2^\Omega$ は自明である。任意の $A \in 2^\Omega$ について、$A \subset \Omega$ であり $\forall a \in A$ について $a \in \Omega$ である。また、Ω が可算であることより A も可算である。よって、$A = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \{w_{\sigma(n)}\}$ と表せるので、可算加法族の定義より $A \in \mathfrak{B}$ であり、$A \in 2^\Omega$ は任意だったので $2^\Omega \subset \mathfrak{B}$ であり、あわせて $\mathfrak{B} = 2^\Omega$ である。 証明終

つまり、確率の知れている事象を可算個集めて標本空間を作ることと、$\mathfrak{B} = 2^\Omega$ とすることは同値である。実際問題として、可算の標本空間の場合はこの場合だけ考えれば十分である。

定理 11.3 可算の標本空間 $\Omega = \{\omega_n\}_{n \in \boldsymbol{N}}$ による確率測度空間 $\Omega(2^\Omega, P)$ について、

$$P(A) = \sum_{\omega_n \in A} P(\{\omega_n\})$$

となる。つまり、事象 A を実現する根本事象の確率の和となる。

(proof)
Ω が可算なら A も可算であり、$A = \sum_{\omega \in A} \omega$ は可算個の和であるから、可算加法性が使えて定理が導かれる。 証明終

11.2.1　ラプラスによる組み合わせ論的確率論

定義 11.3 根本事象の確率がすべて等しいことを、**同様に確からしい**という。◂

定理 11.4 有限の標本空間 $\Omega = \{\omega_1, \cdots, \omega_N\}$ による確率測度空間 $\Omega(2^\Omega, P)$ について、根本事象の確率は同様に確からしいとする。このとき $|A|$ を A に属する根本事象の数とすると

$$P(A) = \frac{|A|}{N}$$

となる。

(proof)
根本事象の同様に確からしい確率を p とする。直前の定理より

$$P(\Omega) = \sum_{n=1}^{N} P(\{\omega_n\}) = \sum_{n=1}^{N} p = Np = 1$$

であり、$p = \frac{1}{N}$ である。したがって、再び直前の定理より

$$\begin{aligned} P(A) &= \sum_{\omega_n \in A} P(\{\omega_n\}) \\ &= \sum_{\omega_n \in A} p \\ &= |A|p = \frac{|A|}{N} \end{aligned}$$

となる。 $\boxed{\text{証明終}}$

これによって、ラプラスによる組み合わせ論的確率論が、確率測度に包含されることがわかった。

12　確率変数

12.1　可測関数としての確率変数

定義 12.1 確率測度空間 $\Omega(\mathfrak{B}, P)$ の可測関数を**確率変数**という。◂

　可測関数の性質については、すでに少なからず述べているが、確率変数として重要なのは、X を確率変数として、定理 6.1 により、ボレル集合 A に対して $X^{-1}(A) = \{w \in \Omega; X(w) \in A\}$ が可測になることである。特に区間（閉区間・開区間・半開区間）がボレル集合であることより

$$\alpha \leq X \leq \beta \text{となる確率 } P(X^{-1}[\alpha, \beta])$$

などが定義できるということを意味している。また、これより

$$\text{ある値 } x \text{ をとる確率 } P(X^{-1}[x, x])$$

も定義される。さらに、Y も確率変数であるとして、定理 6.3 より

- $X \leq Y$ なる確率 $P(E\{X \leq Y\})$
- $X = Y$ なる確率 $P(E\{X = Y\})$
- $X < Y$ なる確率 $P(E\{X < Y\})$

なども定義できるとわかる。これらについては、確率変数に対する式の形で

$$P(\alpha \leq X \leq \beta),\ P(X = x),\ P(X \leq Y),\ P(X = Y),\ P(X < Y)$$

などのようにも表し、より一般にボレル集合 A に対して

$$P(X \in A) \equiv P(X^{-1}(A))$$

と表す。

定義 12.2 確率測度空間 $\Omega(\mathfrak{B}, P)$ の確率変数 X が可算個の値しかとらない場合、すなわち

$$X(\omega) = \sum_i \alpha_i I(\omega; E_i) \quad \left(\sum_i E_i = \Omega\right)$$

と表される場合、X は**離散確率変数**[21]であるという。離散確率変数でない場合は、**連続確率変数**という。離散確率変数 $X(w) = \sum_i \alpha_i I(\omega; E_i)$ に対して

$$p_X(x) \equiv P(X = x) = \sum_{\alpha_j = x} P(E_j)$$

を**確率関数**という。明らかに、可算個の標本空間による確率測度空間に対しては、確率変数はすべて離散確率変数である。◂

定理 12.1 確率変数 X と $\boldsymbol{B}_1$-可測関数 g に対して $g(X)$ も確率変数である。

(proof)

　$\forall A \in \boldsymbol{B}_1$ に対して、定理 6.1 より $g^{-1}(A) \in \boldsymbol{B}_1$ である。よって

$$\{g(X)\}^{-1}(A) = X^{-1}(g^{-1}(A)) \in \boldsymbol{B}_1$$

であり、定理 6.1 より $g(X)$ は確率変数である。 証明終

[21] 単関数は有限個の値しかとらないという定義だった。

12.2 期待値

定義 12.3 確率測度空間 $\Omega(\mathfrak{B}, P)$ の確率変数 X に対して

$$E[X] \equiv \int_\Omega X(\omega)P(d\omega)$$

を**期待値**という。異なる確率測度に対する期待値を考える場合には $E^P[X], E^Q[X]$ のように区別する。◂

つまり、期待値とは、可測関数の積分に他ならない。この定義が、いわゆる期待値と同じものであることが、色々の定理、特に下の定理によってわかってくる。

定理 12.2 確率測度空間 $\Omega(\mathfrak{B}, P)$ 上の離散確率変数 X について、$p_X(x) \equiv P(X = x)$ をその確率関数、g を $\boldsymbol{B}_1$-可測関数として

$$E[g(X)] = \sum_x g(x)p_X(x)$$

となる。

(proof)
$\Omega = \sum_x X^{-1}(x)$ なので

$$\begin{aligned}
E[g(X)] = \int_\Omega g(X(\omega))P(d\omega) &= \int_{\sum_x X^{-1}(x)} g(X(\omega))P(d\omega) \\
&= \sum_x \int_{X^{-1}(x)} g(X(\omega))P(d\omega) \quad \because \text{定理 } 7.30 \\
&= \sum_x \int_{X^{-1}(x)} g(x)P(d\omega) \quad \because \text{部分測度空間における積分} \\
&= \sum_x g(x)P(X^{-1}(x)) \\
&= \sum_x g(x)p_X(x)
\end{aligned}$$

となる。 証明終

系 12.3 確率測度空間 $\Omega(\mathfrak{B}, P)$ 上の離散確率変数 X について、$p_X(x) \equiv P(X = x)$ をその確率関数として

$$E[X] = \sum_x xp_X(x)$$

となる。

12.2.1 確率測度の期待値による表現

定理 12.4 確率測度空間 $\Omega(\mathfrak{B}, P)$ と可測集合 A について

$$P(A) = E[I(\omega; A)] = \int_\Omega I(\omega; A)P(d\omega)$$

が成立する。

(proof)
容易、省略。 $\boxed{\text{証明終}}$

これより、確率測度自体も期待値を用いて議論することができる。つぎは、その一例である。

定理 12.5 （包除原理）

$$P(A_1 \cup \cdots \cup A_n) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{i<j} P(A_i \cap A_j) + \cdots + (-1)^{n-1} P(A_1 \cap \cdots \cap A_n)$$

(proof)
定義関数について

$$\begin{aligned} I(\omega; A_1 \cup \cdots \cup A_n) &= I(\omega; \{A_1^c \cap \cdots \cap A_n^c\}^c) \quad \because \text{ド・モルガン則} \\ &= 1 - I(\omega; A_1^c \cap \cdots \cap A_n^c) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= 1 - I(\omega; A_1^c) \cdots I(\omega; A_n^c) \\ &= 1 - \{1 - I(\omega; A_1)\} \cdots \{1 - I(\omega; A_n)\} \\ &= \sum_{i=1}^{n} I(\omega; A_i) - \sum_{i<j} I(\omega; A_i) I(\omega; A_j) + \cdots + (-1)^{n-1} I(\omega; A_1) \cdots I(\omega; A_n) \\ &= \sum_{i=1}^{n} I(\omega; A_i) - \sum_{i<j} I(\omega; A_i \cap A_j) + \cdots + (-1)^{n-1} I(\omega; A_1 \cap \cdots \cap A_n) \end{aligned}$$

より

$$\begin{aligned} P(A_1 \cup \cdots \cup A_n) &= E[I(\omega; A_1 \cup \cdots \cup A_n)] \\ &= E\left[\sum_{i=1}^{n} I(\omega; A_i) - \sum_{i<j} I(\omega; A_i \cap A_j) + \cdots + (-1)^{n-1} I(\omega; A_1 \cap \cdots \cap A_n)\right] \\ &= \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{i<j} P(A_i \cap A_j) + \cdots + (-1)^{n-1} P(A_1 \cap \cdots \cap A_n) \end{aligned}$$

である。 $\boxed{\text{証明終}}$

12.3 分布

定義 12.4 確率測度空間 $\Omega(\mathfrak{B}, P)$ の確率変数 X に対して、定理 *6.1* より任意のボレル集合 $A \in \boldsymbol{B}_1$ に対して $X^{-1}(A)$ は可測である。したがって

$$\mu_X(A) \equiv P(X \in A) = P(X^{-1}(A))$$

とおくと、$X^{-1}\left(\sum_i A_i\right) = \sum_i X^{-1}(A_i)$ などを考慮すれば、$\boldsymbol{R}(\boldsymbol{B}_1, \mu_X)$ は確率測度空間であるとわかる。このとき、確率測度 μ_X を確率変数 X の**分布・法則**といい、確率変数 X の分布が μ_X であることを、X は分布 μ_X に従う、などという。◂

分布は**もとの標本空間にかかわらず**、実数上のボレル集合に定義される。確率変数を通して根本事象を数としてとらえると、分布が定義され、以後は実数上のボレル集合上の分布を考えればよいことになる。

定理 12.6 確率測度空間 $\Omega(\mathfrak{B}, P)$ の確率変数 X に対して、μ_X をその分布とするとき、g を $\boldsymbol{B}_1$-可測関数として

$$E[g(X)] = \int_{\boldsymbol{R}} g(x)\mu_X(dx)$$

が成り立つ。

(proof)

まず、g が非負の場合を考える。このときは、定理 7.15 と同様にして自然数 n に対し

$$\phi_n(x) \equiv \sum_{k=0}^{n2^n-1} \frac{k}{2^n} I\left(x; \frac{k}{2^n} \le g(x) < \frac{k+1}{2^n}\right) + nI(x; n \le g(x))$$

とおくと、これは g の近似単関数列である。よって

$$\begin{aligned}
\int_{\boldsymbol{R}} g(x)\mu_X(dx) &= \lim_{n\to\infty} \int_{\boldsymbol{R}} \phi_n(x)\mu_X(dx) \\
&= \lim_{n\to\infty} \int_{\boldsymbol{R}} \left\{ \sum_{k=0}^{n2^n-1} \frac{k}{2^n} I\left(x; \frac{k}{2^n} \le g(x) < \frac{k+1}{2^n}\right) + nI(x; n \le g(x)) \right\} \mu_X(dx) \\
&= \lim_{n\to\infty} \left\{ \sum_{k=0}^{n2^n-1} \frac{k}{2^n} \mu_X \left(g^{-1}\left[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right) \right) + n\mu_X(g^{-1}[n,\infty)) \right\} \\
&= \lim_{n\to\infty} \left\{ \sum_{k=0}^{n2^n-1} \frac{k}{2^n} P\left(X^{-1}\left\{ g^{-1}\left[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right) \right\} \right) + nP(X^{-1}(g^{-1}[n,\infty))) \right\} \\
&= \lim_{n\to\infty} \int_{\Omega} \left\{ \sum_{k=0}^{n2^n-1} \frac{k}{2^n} I\left(\omega; (g\circ X)^{-1}\left[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right)\right) + nI(\omega; (g\circ X)^{-1}[n,\infty)) \right\} P(d\omega)
\end{aligned}$$

であるが、積分の中に出てくる

$$\varphi_n(\omega) \equiv \sum_{k=0}^{n2^n-1} \frac{k}{2^n} I\left(\omega; (g\circ X)^{-1}\left[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right)\right) + nI(\omega; (g\circ X)^{-1}[n,\infty))$$

は、上と同様にして $(g\circ X)(\omega) = g(X(\omega))$ の近似単関数列である。したがって

$$\begin{aligned}
\int_{\boldsymbol{R}} g(x)\mu_X(dx) &= \lim_{n\to\infty} \int_{\Omega} \left\{ \sum_{k=0}^{n2^n-1} \frac{k}{2^n} I\left(\omega; (g\circ X)^{-1}\left[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right)\right) + nI(\omega; (g\circ X)^{-1}[n,\infty)) \right\} P(d\omega) \\
&= \lim_{n\to\infty} \int_{\Omega} \varphi_n(\omega)P(d\omega) \\
&= \int_{\Omega} g(X(\omega))P(d\omega) \\
&= E[g(X)]
\end{aligned}$$

である。g が一般の $\boldsymbol{R}(\boldsymbol{B}_1, \mu_X)$ 上の可測関数のときは、非負単関数 g^+, g^- によって $g = g^+ - g^-$ と表せるので

$$\begin{aligned}
\int_{\boldsymbol{R}} g(x)\mu_X(dx) &= \int_{\boldsymbol{R}} g^+(x)\mu_X(dx) - \int_{\boldsymbol{R}} g^-(x)\mu_X(dx) \\
&= E[g^+(X)] - E[g^-(X)] \\
&= E[g^+(X) - g^-(X)] \\
&= E[g(X)]
\end{aligned}$$

が成立する。よって示された。 $\boxed{\text{証明終}}$

系 12.7 確率測度空間 $\Omega(\mathfrak{B}, P)$ の確率変数 X に対して、μ_X をその分布とするとき

$$E[X] = \int_{\boldsymbol{R}} x\mu_X(dx)$$

が成り立つ。

12.4 連続確率変数の密度関数

離散確率変数の場合は、$\boldsymbol{R}$ の側に力点を置いた具体的な期待値の計算式（定理 12.2）が既にある。連続確率変数の場合にそれに相当するものを考える。既に、分布によって、$\boldsymbol{R}$ 上の積分に置き換えられてはいるが、分布による積分を実際にするのは難しい。そこで、同じ $\boldsymbol{R}$ 上の積分であるルベーグ積分に置き換えることが考えられる。

定義 12.5 定理 *12.6* より、任意の確率変数 X に対して、その分布 μ_X によって有界な測度空間 $\boldsymbol{R}(\boldsymbol{B}_1, \mu_X)$ に関する積分

$$E[g(X)] = \int_{\boldsymbol{R}} g(x)\mu_X(dx)$$

に置き換えられている。ここで、σ-有限測度空間であるルベーグ測度空間 $\boldsymbol{R}(\mathfrak{B}, m)$ を考えると、定理 *5.4* より $\boldsymbol{B}_1 \subset \mathfrak{B}$ である。したがって、μ_X が m について**絶対連続（$\mu_X \ll m$）ならば**、ラドン・ニコディムの定理より、ラドン・ニコディム導関数 $f_X : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ が、ほとんど至るところ等しいものを同一視するとして、一意的に存在して

$$E[g(X)] = \int_{\boldsymbol{R}} g(x)\mu_X(dx) = \int_{\boldsymbol{R}} g(x)f_X(x)m(dx)$$

とルベーグ積分によって期待値が表される。このときの、ラドン・ニコディム導関数 f_X を**（確率）密度関数**と言う。また、$A \in \boldsymbol{B}_1$ に対して

$$P(X \in A) = \mu_X(A) = \int_{\boldsymbol{R}} I(x; A)\mu_X(dx) = \int_A f_X(x)m(dx)$$

となっていることにも注意せよ。これと、測度が非負であることより、密度関数はほとんど至るところ非負であることもわかる。◂

μ_X が m について絶対連続 $(\mu_X \ll m)$ とは、m についての零集合が μ_X についても零集合になることである。一点はルベーグ測度 m については必ず零集合なので、確率密度関数が存在するには、任意の $x \in \boldsymbol{R}$ について

$$\mu_X(\{x\}) = P(X^{-1}(x)) = P(X = x)$$

が 0 でなくてはならない。すなわち、確率関数が常に 0 であることが必要である。これから明らかに、確率密度関数は連続確率変数に対してしか存在しない。

逆に、確率密度関数を定めると、p101（積分による新たな測度の定義）と同じ議論で、分布が一つ定まる。実際には、これによって正規分布など諸々の分布を定義し、現実の確率変数がどの分布に当てはまるかを考えるという使い方がなされる。

定理 12.8 f を確率変数の密度関数とするとき

$$\int_{\boldsymbol{R}} f(x)m(dx) = 1$$

である。

(proof)
確率変数を X、分布を μ として

$$\int_{\boldsymbol{R}} f(x)m(dx) = \mu(\boldsymbol{R}) = P(X \in \boldsymbol{R}) = 1$$

である。 証明終

定理 12.9 f を確率変数の密度関数とし、f はほとんど至るところ微分可能であるとする。このとき

$$\int_{\boldsymbol{R}} f'(x)m(dx) = 0$$

となる。

(proof)
f は微分可能であり

$$f'(x) = \lim_{n\to\infty} n\left\{f\left(x+\frac{1}{n}\right) - f(x)\right\}$$

と表せる。したがって

$$\begin{aligned}
\int_{\boldsymbol{R}} f'(x)m(dx) &= \int_{\boldsymbol{R}} \lim_{n\to\infty} n\left\{f\left(x+\frac{1}{n}\right) - f(x)\right\} m(dx) \\
&= \lim_{n\to\infty} \int_{\boldsymbol{R}} n\left\{f\left(x+\frac{1}{n}\right) - f(x)\right\} m(dx) \quad \because \text{優収束定理} \\
&= \lim_{n\to\infty} n\left\{\int_{\boldsymbol{R}} f\left(x+\frac{1}{n}\right) m(dx) - \int_{\boldsymbol{R}} f(x)m(dx)\right\} \\
&= \lim_{n\to\infty} n\{1-1\} \\
&= 0
\end{aligned}$$

である。 証明終

12.5 多次元分布

定義 12.6 $X_1, \cdots, X_n$ を確率測度空間 $\Omega(\mathfrak{B}, P)$ の確率変数とするとき、写像 $\boldsymbol{X} : \Omega \to \boldsymbol{R^n}$ を

$$\boldsymbol{X}(\omega) \equiv \begin{pmatrix} X_1(\omega) \\ \vdots \\ X_n(\omega) \end{pmatrix}$$

n **次元確率変数**という。このとき、$A \subset \boldsymbol{R^n}$ に対して

$$\boldsymbol{X}^{-1}(A) = \{\omega \in \Omega; \boldsymbol{X}(\omega) \in A\} = \{\omega \in \Omega; (X_1(\omega), \cdots, X_n(\omega))^T \in A\}$$

などである。◂

定理 12.10 $\boldsymbol{X} = (X_1, \cdots, X_n)^T$ を確率測度空間 $\Omega(\mathfrak{B}, P)$ の n 次元確率変数とする。このとき、任意の n 次元ボレル集合 $A \in \boldsymbol{B}_n$ に対して $\boldsymbol{X}^{-1}(A) \in \mathfrak{B}$ である。

(proof)
定理 6.1 の証明と同じ。 証明終

定義 12.7 $\boldsymbol{X} = (X_1, \cdots, X_n)^T$ を確率測度空間 $\Omega(\mathfrak{B}, P)$ の n 次元確率変数とするとき、直前の定理より、任意の n 次元ボレル集合 $A \in \boldsymbol{B}_n$ に対して $\boldsymbol{X}^{-1}(A)$ は可測である。したがって

$$P(\boldsymbol{X} \in A) \equiv P(\boldsymbol{X}^{-1}(A))$$

を常に考えることができ

$$\mu_{\boldsymbol{X}}(A) \equiv P(\boldsymbol{X} \in A) = P(\boldsymbol{X}^{-1}(A))$$

とおくと、$\boldsymbol{X}^{-1}\left(\sum_i A_i\right) = \sum_i \boldsymbol{X}^{-1}(A_i)$ などを考慮すれば、$\boldsymbol{R^n}(\boldsymbol{B}_n, \mu_{\boldsymbol{X}})$ は確率測度空間であるとわかる。このとき、確率測度 $\mu_{\boldsymbol{X}}$ を確率変数 $X_1, \cdots, X_n$ の**同時分布・結合分布**という。また、同時分布に対して、確率変数 X_i $(i = 1, \cdots, n)$ 一つ一つの分布を**周辺分布**[22]という。◂

定理 12.11 確率測度空間 $\Omega(\mathfrak{B}, P)$ の n 次元確率変数 $\boldsymbol{X} = (X_1, \cdots, X_n)^T$ に対して、$\mu_{\boldsymbol{X}}$ をその同時分布とするとき、$g : \boldsymbol{R^n} \to \boldsymbol{R}$ を $\boldsymbol{B}_n$-可測関数として

$$E[g(\boldsymbol{X})] = \int_{\boldsymbol{R^n}} g(\boldsymbol{x})\mu_{\boldsymbol{X}}(d\boldsymbol{x})$$

が成り立つ。

(proof)
定理 12.6 と同様。 証明終

12.5.1 同時密度関数

確率変数の時と同様に、密度関数を多次元確率変数に対しても定義できる。

定義 12.8 定理 *12.11* より、任意の確率変数 $\boldsymbol{X} = (X_1, \cdots, X_n)^T$ に対して、その同時分布 $\mu_{\boldsymbol{X}}$ によって有界な測度空間 $\boldsymbol{R^n}(\boldsymbol{B}_n, \mu_{\boldsymbol{X}})$ に関する積分

$$E[g(\boldsymbol{X})] = \int_{\boldsymbol{R^n}} g(\boldsymbol{x})\mu_{\boldsymbol{X}}(d\boldsymbol{x})$$

に置き換えられている。ここで、σ-有限測度空間であるルベーグ測度空間 $\boldsymbol{R^n}(\mathfrak{B}_n, m_n)$ を考えると、定理 *5.4* より $\boldsymbol{B}_n \subset \mathfrak{B}_n$ である。したがって、$\mu_{\boldsymbol{X}}$ が m_n について**絶対連続（$\mu_{\boldsymbol{X}} \ll m_n$）ならば**、ラドン・ニコディムの定理より、ラドン・ニコディム導関数 $f : \boldsymbol{R^n} \to \boldsymbol{R}$ が、ほとんど至るところ等しいものを同一視するとして、一意的に存在して

$$E[g(\boldsymbol{X})] = \int_{\boldsymbol{R^n}} g(\boldsymbol{x})\mu_{\boldsymbol{X}}(d\boldsymbol{x}) = \int_{\boldsymbol{R^n}} g(\boldsymbol{x})f(\boldsymbol{x})m_n(d\boldsymbol{x})$$

とルベーグ積分によって期待値が表される。このときの、ラドン・ニコディム導関数 f を**同時密度関数**と言う。これに対して、各 X_i $(i = 1, \cdots, n)$ に対する密度関数を周辺密度関数という。また、$A \in \boldsymbol{B}_n$ に対して

$$P(\boldsymbol{X} \in A) = \mu_{\boldsymbol{X}}(A) = \int_{\boldsymbol{R^n}} I(\boldsymbol{x}; A)\mu_{\boldsymbol{X}}(d\boldsymbol{x}) = \int_A f(\boldsymbol{x})m(d\boldsymbol{x})$$

となっていること、またこれより、同時密度関数がほとんど至るところ非負であることにも注意せよ。◂

同時密度と周辺密度に関しては、以下の関係が成り立つ。

[22]周辺分布がすべて一致しても同時分布が一致するとは限らない。

定理 12.12 確率測度空間 $\Omega(\mathfrak{B}, P)$ の n 次元確率変数 $\boldsymbol{X} = (X_1, \cdots, X_n)^T$ に対して、f をその同時密度関数とし、f_i を確率変数 X_i の密度関数とする。このとき

$$f_i(t) = \int_{\boldsymbol{R^{n-1}}} f(x_1, \cdots, x_{i-1}, t, x_{i+1}, \cdots, x_n) m(dx_1) \cdots m(dx_{i-1}) m(dx_{i+1}) \cdots m(dx_n) \quad a.e.$$

である。

(proof)
まず、$A \in \boldsymbol{B}_1$ に対して

$$P(X_i \in A) = \int_A f_i(x) m(dx)$$

である。また $X_i \in A \;\Leftrightarrow\; \boldsymbol{X} \in \boldsymbol{R^{i-1}} \times A \times \boldsymbol{R^{n-i}}$ なので

$$\begin{aligned} P(X_i \in A) &= P(\boldsymbol{X} \in \boldsymbol{R^{i-1}} \times A \times \boldsymbol{R^{n-i}}) \\ &= \int_{\boldsymbol{R^{i-1}} \times A \times \boldsymbol{R^{n-i}}} f(\boldsymbol{x}) m_n(d\boldsymbol{x}) \\ &= \int_A \left(\int_{\boldsymbol{R^{n-1}}} f(x_1, \cdots, x_n) m(dx_1) \cdots m(dx_{i-1}) m(dx_{i+1}) \cdots m(dx_n) \right) m(dx_i) \quad \because \text{フビニの定理} \end{aligned}$$

である。ここで

$$F(t) \equiv \int_{\boldsymbol{R^{n-1}}} f(x_1, \cdots, x_{i-1}, t, x_{i+1}, \cdots, x_n) m(dx_1) \cdots m(dx_{i-1}) m(dx_{i+1}) \cdots m(dx_n)$$

とおくと

$$\int_A f_i(x) m(dx) = \int_A F(t) m(dt)$$

となっている。ここで、$E\{f_i \geq F\} = \{x \in \boldsymbol{R}; f_i(x) \geq F(x)\}$ を考えると、これは補題 6.3 よりルベーグ可測集合である。したがって、定理 5.12 よりボレル集合 G と零集合 N により $E\{f_i \geq F\} = G - N$ と表される。したがって

$$\begin{aligned} \int_{E\{f_i \geq F\}} f_i(x) m(dx) &= \int_G f_i(x) m(dx) \\ &= \int_G F(x) m(dx) \\ &= \int_{E\{f_i \geq F\}} F(x) m(dx) \end{aligned}$$

$$\int_{E\{f_i \geq F\}} |f_i(x) - F(x)| m(dx) = 0 \quad \because E\{f_i \geq F\} \text{ 上では当然 } f_i - F \geq 0$$

であり、$E\{f_i \geq F\}$ 上で $f_i = F \quad a.e.$ である。同様にして $E\{f_i < F\} = \{x \in \boldsymbol{R}; f_i(x) < F(x)\}$ 上でも $f_i = F \quad a.e.$ であることがいえて、定理が示される。 証明終

12.6 独立性

定義 12.9 確率測度空間 $\Omega(\mathfrak{B}, P)$ の確率変数 $X_1, \cdots, X_n$ が**独立**であるとは、任意の $A_1, \cdots, A_n \in \boldsymbol{B}_1$ に対して

$$P(X_1 \in A_1, \cdots, X_n \in A_n) = P(X_1 \in A_1) \cdots P(X_n \in A_n)$$

となることを言う。これは、$\boldsymbol{X} = (X_1, \cdots, X_n)^T$ とすれば

$$P(\boldsymbol{X} \in A_1 \times \cdots \times A_n) = P(X_1 \in A_1) \cdots P(X_n \in A_n)$$

と書ける。よく知られているように、任意の異なる二つの確率変数 X_i, X_j が独立でも、$X_1, \cdots, X_n$ が独立とは限らない。◂

定理 12.13 確率測度空間 $\Omega(\mathfrak{B}, P)$ の確率変数 $X_1, \cdots, X_n$ が独立であることと、n 次元確率変数 $\boldsymbol{X} = (X_1, \cdots, X_n)^T$ の同時分布 μ と X_i の（周辺）分布 μ_i について、任意の $A_1, \cdots, A_n \in \boldsymbol{B}_1$ に対して

$$\mu(A_1 \times \cdots \times A_n) = \mu_1(A_1) \cdots \mu_n(A_n)$$

が成立することは同値である。

(proof)
まず独立であるとき。

$$\begin{aligned}
\mu(A_1 \times \cdots \times A_n) &= P(\boldsymbol{X} \in A_1 \times \cdots \times A_n) \\
&= P(X_1 \in A_1, \cdots, X_n \in A_n) \\
&= P(X_1 \in A_1) \cdots P(X_n \in A_n) \quad \because \text{独立性} \\
&= \mu_1(A_1) \cdots \mu_n(A_n)
\end{aligned}$$

であり、成立する。

逆に、任意の $A_1, \cdots, A_n \in \boldsymbol{B}_1$ に対して $\mu(A_1 \times \cdots \times A_n) = \mu_1(A_1) \cdots \mu_n(A_n)$ が成立するとき。

$$\begin{aligned}
&P(X_1 \in A_1, \cdots, X_n \in A_n) \\
&\qquad = P(X_1 \in A_1, \cdots, X_n \in A_n) \\
&\qquad = P(\boldsymbol{X} \in A_1 \times \cdots \times A_n) \\
&\qquad = \mu(A_1 \times \cdots \times A_n) \\
&\qquad = \mu_1(A_1) \cdots \mu_n(A_n) \\
&\qquad = P(X_1 \in A_1) \cdots P(X_n \in A_n)
\end{aligned}$$

より、独立性が成り立つ。 証明終

分布は有界な測度空間を成すので、当然それは σ-有限測度空間でもある。よって、この定理は、独立ならばフビニの定理 9.12 が使えることを示している。これを定理としてまとめると以下のようになる。

定理 12.14 （フビニの定理 同時分布版）確率測度空間 $\Omega(\mathfrak{B}, P)$ の確率変数 $X_1, \cdots, X_n$ が独立であるとき、n 次元確率変数 $\boldsymbol{X} = (X_1, \cdots, X_n)^T$ の同時分布 μ と X_i の（周辺）分布 μ_i について、g を $\boldsymbol{B}_n$-可測関数とすれば

$$\int_{\boldsymbol{R}^n} g(\boldsymbol{x}) \mu(d\boldsymbol{x}) = \int_{\boldsymbol{R}} \cdots \int_{\boldsymbol{R}} g(x_1, \cdots, x_n) \mu_1(dx_1) \cdots \mu_n(dx_n)$$

が成立する。

系 12.15 確率測度空間 $\Omega(\mathfrak{B}, P)$ の確率変数 $X_1, \cdots, X_n$ が独立であるとき、X_i の（周辺）分布を μ_i として、g を $\boldsymbol{B}_n$-可測関数とすれば

$$E[g(X_1, \cdots, X_n)] = \int_{\boldsymbol{R}} \cdots \int_{\boldsymbol{R}} g(x_1, \cdots, x_n) \mu_1(dx_1) \cdots \mu_n(dx_n)$$

である。

定理 12.16 確率測度空間$\Omega(\mathfrak{B}, P)$の確率変数$X_1, \cdots, X_n$が独立で可積分であるとき、$X_1 \cdots X_n$も確率変数であり

$$E[X_1 \cdots X_n] = E[X_1] \cdots E[X_n]$$

となる。

(proof)

定理 6.4 より $X_1 \cdots X_n$ が確率変数であることが示される。$\boldsymbol{X} = (X_1, \cdots, X_n)^T$ として μ をその同時分布、μ_i を X_i の（周辺）分布とすると、独立性から直前の定理がつかえて、$g(x_1, \cdots, x_n) = x_1 \cdots x_n$ とすると

$$\begin{aligned}
E[X_1 \cdots X_n] &= E[g(\boldsymbol{X})] \\
&= \int_{\boldsymbol{R}^n} g(\boldsymbol{x})\mu(d\boldsymbol{x}) \quad \because \text{定理 12.11} \\
&= \int_{\boldsymbol{R}} \cdots \int_{\boldsymbol{R}} g(x_1, \cdots, x_n)\mu_1(dx_1) \cdots \mu_n(dx_n) \quad \because \text{フビニの定理} \\
&= \int_{\boldsymbol{R}} \cdots \int_{\boldsymbol{R}} x_1 \cdots x_n \mu_1(dx_1) \cdots \mu_n(dx_n) \\
&= \int_{\boldsymbol{R}} x_1 \mu_1(dx_1) \cdots \int_{\boldsymbol{R}} x_n \mu_n(dx_n) \quad \because \text{線形性} \\
&= E[X_1] \cdots E[X_n] \quad \because \text{定理 12.7}
\end{aligned}$$

となる。 $\boxed{\text{証明終}}$

定理 12.17 確率測度空間$\Omega(\mathfrak{B}, P)$の確率変数$X_1, \cdots, X_n$が独立であり、$g_1, \cdots, g_n$が$\boldsymbol{B}_1$-可測関数であるとき、$g_1(X_1), \cdots, g_n(X_n)$も独立である。

(proof)

$A_1, \cdots, A_n \in \boldsymbol{B}_1$ に対して、定理 6.1 より $g_1^{-1}(A_1), \cdots, g_n^{-1}(A_n) \in \boldsymbol{B}_1$ である。よって

$$\begin{aligned}
P(g_1(X_1) \in A_1, \cdots, g_n(X_n) \in A_n) &= P(X_1 \in g_1^{-1}(A_1), \cdots, X_n \in g_n^{-1}(A_n)) \\
&= P(X_1 \in g_1^{-1}(A_1)) \cdots P(X_n \in g_n^{-1}(A_n)) \quad \because \text{独立性} \\
&= P(g_1(X_1) \in A_1) \cdots P(g_n(X_n) \in A_n)
\end{aligned}$$

であり、示される。 $\boxed{\text{証明終}}$

定理 12.18 確率測度空間$\Omega(\mathfrak{B}, P)$の確率変数$X_1, \cdots, X_n$について、$\boldsymbol{X} = (X_1, \cdots, X_n)^T$の同時密度関数を$f$、$X_i$の（周辺）密度関数を$f_i$とすれば、$X_1, \cdots, X_n$が独立であることと

$$f(x_1, \cdots, x_n) = f_1(x_1) \cdots f_n(x_n) \quad a.e.$$

であることは同値である。

(proof)

$X_1, \cdots, X_n$ が独立であるとき、$F(\boldsymbol{x}) = F(x_1, \cdots, x_n) = f_1(x_1) \cdots f_n(x_n)$ と置いておく。$\forall A \in \boldsymbol{B}_n$ につ

いて、$\boldsymbol{X}$ の同時分布を μ、X_i の周辺分布を μ_i として、独立性よりフビニの定理 12.14 が使えて

$$\begin{aligned}
\mu(A) = E[I(\boldsymbol{X};A)] &= \int_{\boldsymbol{R}^n} I(\boldsymbol{X};A)\mu(d\boldsymbol{x}) \\
&= \int_{\boldsymbol{R}} \cdots \int_{\boldsymbol{R}} I\left((x_1,\cdots,x_n)^T;A\right)\mu_1(dx_1)\cdots\mu_n(dx_n) \quad \because \text{フビニの定理} \\
&= \int_{\boldsymbol{R}} \cdots \int_{\boldsymbol{R}} I\left((x_1,\cdots,x_n)^T;A\right) f_1(x_1)\cdots f_n(x_n)m(dx_1)\cdots m(dx_n) \quad \because \text{密度関数の定義} \\
&= \int_{\boldsymbol{R}^n} I\left(\boldsymbol{x};A\right)F(\boldsymbol{x})m(d\boldsymbol{x}) \quad \because \text{ルベーグ積分のフビニの定理 9.15} \\
&= \int_A F(\boldsymbol{x})m(d\boldsymbol{x})
\end{aligned}$$

であり、F は同時密度関数（ラドン・ニコディム導関数）である。したがって、ラドン・ニコディム導関数の一意性より

$$f = F \quad a.e.$$

である。

逆に、$f(x_1,\cdots,x_n) = f_1(x_1)\cdots f_n(x_n) \quad a.e.$ であるとき、$\forall A_1,\cdots,A_n \in \boldsymbol{B}_1$ について

$$\begin{aligned}
P(\boldsymbol{X} \in A_1\times\cdots\times A_n) &= \int_{A_1\times\cdots\times A_n} f(\boldsymbol{x})m(d\boldsymbol{x}) \\
&= \int_{\boldsymbol{R}^n} I(\boldsymbol{x};A_1\times\cdots\times A_n)f(\boldsymbol{x})m(d\boldsymbol{x}) \\
&= \int_{\boldsymbol{R}} \cdots \int_{\boldsymbol{R}} I((x_1,\cdots,x_n)^T;A_1\times\cdots\times A_n)f(x_1,\cdots,x_n)m(dx_1)\cdots m(dx_n) \\
&\qquad \because \text{密度関数が非負 } (a.e.) \text{ より定理 9.15} \\
&= \int_{\boldsymbol{R}} \cdots \int_{\boldsymbol{R}} I(x_1;A_1)\cdots I(x_n;A_n)f_1(x_1)\cdots f_n(x_n)m(dx_1)\cdots m(dx_n) \\
&= \int_{\boldsymbol{R}} I(x_1;A_1)f_1(x_1)m(dx_1)\cdots \int_{\boldsymbol{R}} I(x_n;A_n)f_n(x_n)m(dx_n) \\
&= P(X_1 \in A_1)\cdots P(X_n \in A_n)
\end{aligned}$$

であり、確かに独立である。よって示された。 証明終

13　条件付き確率・条件付き期待値

13.1　加算加法族による一般的な条件付き期待値・条件付き確率

定義 13.1 確率測度空間 $\Omega(\mathfrak{B}, P)$ の非負確率変数 X [23]と加算加法族 $\mathcal{H} \subset \mathfrak{B}$ について

$$\mu_X(A) \equiv \int_A X(\omega) P(d\omega)$$

とおくと、定理 *10.3* より、$\Omega(\mathcal{H}, \mu_{\mathcal{X}})$ は測度空間である。また、X がなので、$\Omega(\mathcal{H}, \mu_{\mathcal{X}})$ は σ-有限である。このとき、$P_{\mathcal{H}}$ を P の $\mathcal{H}$ への制限として、測度空間 $\Omega(\mathcal{H}, \mathcal{P}_{\mathcal{H}})$ を考える[24]。$\mu_X \ll P_{\mathcal{H}}$ なので、ラドン・ニコディムの定理??より $\mathcal{H}$ 可測なラドン・ニコディム導関数 $\dfrac{d\mu_X}{dP_{\mathcal{H}}}$ が存在する。このときのラドン・ニコディム導関数を**条件付き期待値**といい

$$\mathrm{E}[X|\mathcal{H}]$$

と表す。条件付き期待値は、ラドン・ニコディム導関数なので、ほとんど至るところ等しいものと同一視するとして、一意である。以後、条件付き期待値に関する等式には $a.e.$ が付いていると考えるものとする。

非負と限らない確率変数 X に対しては、$X = X^+ - X^-$ と二つの非負確率変数に分解することにより

$$\mathrm{E}[X|\mathcal{H}] \equiv \mathrm{E}[X^+|\mathcal{H}] - \mathrm{E}[X^-|\mathcal{H}]$$

と定義する。◂

上記の定義は、以下のように言い換えられる。

定理 13.1 確率測度空間 $\Omega(\mathfrak{B}, P)$ と、その確率変数 X、加算加法族 $\mathcal{H} \subset \mathfrak{B}$ について、確率変数 G が

$$G \text{ は } \mathcal{H} \text{ 可測}$$

$$\forall A \in \mathcal{H}, \quad \int_A X(\omega)P(d\omega) = \int_A G(\omega)P(d\omega)$$

の両方を満たすことと、$G = \mathrm{E}[X|\mathcal{H}]$ $a.e.$ であることは同値である。

補題 13.2 確率測度空間 $\Omega(\mathfrak{B}, P)$ の加算加法族 $\mathcal{H} \subset \mathfrak{B}$、$A_n \in \mathfrak{B} \quad (n = 1, \cdots)$ について

$$\mathrm{E}\left[I_{\left(\sum_{n=1}^{\infty} A_n\right)} \middle| \mathcal{H}\right] = \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{E}[I_{A_n}|\mathcal{H}]$$

(proof)

まず、$\mathcal{H}$ 可測性について。定理 6.4 より $\displaystyle\sum_{n=1}^{N} \mathrm{E}[I_{A_n}|\mathcal{H}]$ は $\mathcal{H}$ 可測である。よって、その $N \to \infty$ とした極限は定理 6.6 より $\mathcal{H}$ 可測である。また、任意の $H \in \mathcal{H}$ について

$$\begin{aligned}
\int_H I_{\left(\sum_{n=1}^{\infty} A_n\right)}(\omega)P(d\omega) &= \int_H \sum_{n=1}^{\infty} I_{A_n}(\omega)P(d\omega) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \int_H I_{A_n}(\omega)P(d\omega) \because \text{定理 7.29} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \int_H \mathrm{E}[I_{A_n}|\mathcal{H}](\omega)P(d\omega) \\
&= \int_H \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{E}[I_{A_n}|\mathcal{H}](\omega)P(d\omega) \because \text{定理 7.29}
\end{aligned}$$

[23]本章では期待値を元に議論をするため、確率変数は可積分、すなわちほとんど至るところ有界なもののみを考えているものとする。
[24]$\mathcal{H} = \mathfrak{B}$ ならば、自明に X がラドン・ニコディム導関数である。

であるので、定理 13.1 より示される。 証明終

定義 13.2 確率測度空間 $\Omega(\mathfrak{B}, P)$ の加算加法族 $\mathcal{H} \subset \mathfrak{B}$、$A \in \mathfrak{B}$ について、$I_A(\omega) \equiv I(\omega \in A)$ として、**条件付き確率**を

$$P(A|\mathcal{H}) \equiv \mathrm{E}[I_A|\mathcal{H}]$$

と定義する。これは明らかに非負であり、$P(\emptyset|\mathcal{H}) = 0,\ P(\Omega|\mathcal{H}) = 1$ である。さらに直前の補題より加算加法性が成立するので、条件付き確率は確率測度である。したがって、通常の確率と同様に確率変数 X に対して

$$P(X \in A|\mathcal{H}) \equiv P(X^{-1}(A)|\mathcal{H}) = \mathrm{E}[I(X \in A)|\mathcal{H}]$$

などが定義され、これによって**条件付き分布**も

$$\mu_{X|\mathcal{H}}(A) \equiv P(X \in A|\mathcal{H})$$

と定義される。条件付き確率は定数ではなく確率変数であることには留意する必要がある。◂

条件付き確率が確率測度であるならば、条件付き確率測度による期待値を考えることができる。これが条件付き期待値に一致することは感覚的には明らかであるが、確認しておく必要がある。

定理 13.3 確率測度空間 $\Omega(\mathfrak{B}, P)$ と、その確率変数 X、加算加法族 $\mathcal{H} \subset \mathfrak{B}$ について

$$\mathrm{E}[X|\mathcal{H}] = \int_\Omega X(\omega) P(d\omega|\mathcal{H})$$

が成立する。

(proof)

まず、X が単関数である場合。$X(\omega) = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i I(\omega \in E_i)$ と表されるとする。このとき

$$\int_\Omega X(\omega) P(d\omega|\mathcal{H}) = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i P(E_i|\mathcal{H})$$

であり、$P(E_i|\mathcal{H})$ は $\mathcal{H}$ 可測関数なので、その和である X も定理 6.4 より $\mathcal{H}$ 可測関数である。さらに、任意の $H \in \mathcal{H}$ について

$$\begin{aligned}
\int_H \left(\int_\Omega X(\omega) P(d\omega|\mathcal{H}) \right)(\omega_2) P(d\omega_2) &= \int_H \sum_{i=1}^{N} \alpha_i P(E_i|\mathcal{H})(\omega_2) P(d\omega_2) \\
&= \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \int_H \mathrm{E}[I_{E_i}|\mathcal{H}](\omega_2) P(d\omega_2) \\
&= \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \int_H I_{E_i}(\omega_2) P(d\omega_2) \\
&= \sum_{i=1}^{N} \alpha_i P(E_i \cap H) \\
&= \int_H X(\omega) P(d\omega)
\end{aligned}$$

であるので、定理 13.1 より、この場合、定理は成立する。

一般の可測関数 X については、定理 7.16 より単関数列 $\{\varphi_n\}$ で $\varphi_n \to X$ なるものが存在する。上で示したことより、任意の自然数 n について $\int_\Omega \varphi_n(\omega)P(d\omega|\mathcal{H})$ は $\mathcal{H}$ 可測である。したがって、定理 6.6 より

$$\int_\Omega X(\omega)P(d\omega|\mathcal{H}) = \lim_{n\to\infty}\int_\Omega \varphi_n(\omega)P(d\omega|\mathcal{H})$$

は $\mathcal{H}$ 可測である。また、任意の $H \in \mathcal{H}$ について

$$\begin{aligned}
\int_H \left(\int_\Omega X(\omega)P(d\omega|\mathcal{H})\right)(\omega_2)P(d\omega_2) &= \int_H \left(\lim_{n\to\infty}\int_\Omega \varphi_n(\omega)P(d\omega|\mathcal{H})\right)(\omega_2)P(d\omega_2) \because \text{優収束定理} \\
&= \int_H \lim_{n\to\infty} \mathrm{E}[\varphi_n|\mathcal{H}](\omega_2)P(d\omega_2) \because \text{単関数の場合} \\
&= \lim_{n\to\infty}\int_H \mathrm{E}[\varphi_n|\mathcal{H}](\omega_2)P(d\omega_2) \because \text{優収束定理} \\
&= \lim_{n\to\infty}\int_H \varphi_n(\omega_2)P(d\omega_2) \\
&= \int_H X(\omega)P(d\omega)
\end{aligned}$$

であるので、定理 13.1 より、一般の可測関数に関しても、定理は成立する。 証明終

これによって、条件付き期待値が「期待値」であることが確認された。したがって、**期待値（すなわち積分）に関する諸々の性質が使えることになる**。

さて、条件付き期待値が、単なる期待値ではないということに関して極めて根本的な性質が次の定理である。

定理 13.4 確率測度空間 $\Omega(\mathfrak{B}, P)$ と、その確率変数 X, Y、加算加法族 $\mathcal{H} \subset \mathfrak{B}$ について、確率変数 Y が $\mathcal{H}$ 可測であるとき

$$\mathrm{E}[XY|\mathcal{H}] = Y\mathrm{E}[X|\mathcal{H}]$$

となる。

(proof)

$Y, \mathrm{E}[X|\mathcal{H}]$ が $\mathcal{H}$ 可測なので、$Y\mathrm{E}[X|\mathcal{H}]$ は $\mathcal{H}$ 可測である。Y が単関数の場合を考える。$Y(\omega) = \sum_{i=1}^N \alpha_i I(\omega \in E_i)$ と表されるとする。任意の $H \in \mathcal{H}$ について

$$\begin{aligned}
\int_H X(\omega)Y(\omega)P(d\omega) &= \int_H X(\omega)Y(\omega)P(d\omega) \\
&= \int_H X(\omega)\sum_{i=1}^N \alpha_i I(\omega \in E_i)P(d\omega) \\
&= \sum_{i=1}^N \alpha_i \int_{H\cap E_i} X(\omega)P(d\omega) \\
&= \sum_{i=1}^N \alpha_i \int_{H\cap E_i} E[X|\mathcal{H}](\omega)P(d\omega) \\
&= \int_H \sum_{i=1}^N \alpha_i I(\omega \in E_i)E[X|\mathcal{H}](\omega)P(d\omega) \\
&= \int_H Y(\omega)E[X|\mathcal{H}](\omega)P(d\omega)
\end{aligned}$$

であるので、定理 13.1 よりこの場合成立する。Y が一般の確率変数のときも、単関数の極限として表されるので、期待値の性質よりやはり成立する。よって示された。 証明終

系 13.5 確率測度空間 $\Omega(\mathfrak{B}, P)$ と、その確率変数 X、加算加法族 $\mathcal{H} \subset \mathfrak{B}$ について、確率変数 X が $\mathcal{H}$ 可測であるとき

$$\mathrm{E}[X|\mathcal{H}] = X$$

となる。

系 13.6 確率測度空間 $\Omega(\mathfrak{B}, P)$ と、その確率変数 X, Y、加算加法族 $\mathcal{H} \subset \mathfrak{B}$ について、確率変数 Y が $\mathcal{H}$ 可測であるとき、$g : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ がボレル関数であれば

$$\mathrm{E}[g(Y)X|\mathcal{H}] = g(Y)\mathrm{E}[X|\mathcal{H}]$$

となる[25]。

上記の内容は、$\mathcal{H}$ 可測な確率変数は、条件付き期待値 $E[\cdot|\mathcal{H}]$ の中では定数、すなわち確定値として扱ってよいことを表している。したがって、加算加法族 $\mathcal{H}$ は、すでに確定した「条件」に関する「情報」を表していると解釈できるのである。そして、加算加法族が大きいほど多くの「情報」を持っている、すなわち、より確定していると考えられるということになる。これを押し進めれば、最小の加算加法族 $\{\emptyset, \Omega\}$ に対する条件付き期待値が、通常の期待値に一致しそうであり、最大の加算加法族 $\mathfrak{B}$ に対する条件付き期待値は確率変数そのものになりそうであるが、それは正しい。次の定理を参照せよ。

定理 13.7 確率測度空間 $\Omega(\mathfrak{B}, P)$ と、その確率変数 X について

$$\mathrm{E}[X|\{\emptyset, \Omega\}] = \mathrm{E}[X]$$

が成立する。

(proof)
定理 13.1 より、容易に示される。 証明終

定理 13.8 確率測度空間 $\Omega(\mathfrak{B}, P)$ と、その確率変数 X について

$$\mathrm{E}[X|\mathfrak{B}] = X$$

が成立する。

(proof)
X が $\mathfrak{B}$ 可測であることより、容易に示される。 証明終

tower rule と称される下記の性質も重要である。

定理 13.9 （tower rule）確率測度空間 $\Omega(\mathfrak{B}, P)$ と、その確率変数 X、加算加法族 $\mathcal{H}_S \subset \mathcal{H}_B \subset \mathfrak{B}$ について

$$\mathrm{E}[\mathrm{E}[X|\mathcal{H}_B]|\mathcal{H}_S] = \mathrm{E}[X|\mathcal{H}_S]$$

となる。

(proof)
定理 13.1 より、任意の $A \in \mathcal{H}_S \subset \mathcal{H}_B$ について

$$\begin{aligned}\int_A \mathrm{E}[X|\mathcal{H}_B](\omega)P(d\omega) &= \int_A X(\omega)P(d\omega) \\ &= \int_A \mathrm{E}[X|\mathcal{H}_S](\omega)P(d\omega)\end{aligned}$$

である。したがって、定理 13.1 より $\mathrm{E}[X|\mathcal{H}_S] = \mathrm{E}[\mathrm{E}[X|\mathcal{H}_B]|\mathcal{H}_S]$ である。 証明終

[25] 定理 6.7 を参照せよ

系 13.10 （tower rule2）確率測度空間 $\Omega(\mathfrak{B}, P)$ と、その確率変数 X、加算加法族 $\mathcal{H} \subset \mathfrak{B}$ について

$$\mathrm{E}[\mathrm{E}[X|\mathcal{H}]] = \mathrm{E}[X]$$

が成立する。

13.2 確率変数の条件付き期待値・条件付き確率

確率変数の値がわかっているという条件付きの確率・期待値を考えたい。$\boldsymbol{Y}$ を n 次元確率変数とすると、直前の議論からして、$\boldsymbol{Y}$ を確定値であるとしたいのであるから、ボレル集合に対する $\boldsymbol{Y}$ の逆像 $\{A \in \mathfrak{B}; \boldsymbol{Y}(A) \in \boldsymbol{B}_n\}$ が条件を規定する加算加法族に含まれているべきである。そこで、次の定義が生まれる。

定義 13.3 確率測度空間 $\Omega(\mathfrak{B}, P)$ と、その確率変数 X、n 次元確率変数 $\boldsymbol{Y}$ について、ボレル集合に対する $\boldsymbol{Y}$ の逆像 $\{A \in \mathfrak{B}; (A) \in \boldsymbol{B}_n\}$ を含む最小の加算加法族を

$$\mathcal{H}_{\boldsymbol{Y}} \equiv \sigma[\{A \in \mathfrak{B}; \boldsymbol{Y}(A) \in \boldsymbol{B}_n\}] \subset \mathfrak{B}$$

と表す。このとき、任意の $B \in \boldsymbol{B}_n$ について

$$\boldsymbol{Y}^{-1}(B) \in \{A \in \mathfrak{B}; \boldsymbol{Y}(A) \in \boldsymbol{B}_n\} \subset \mathcal{H}_{\boldsymbol{Y}}$$

である、すなわち $\boldsymbol{Y}$ は $\mathcal{H}_{\boldsymbol{Y}}$ 可測である。このとき

$$\mathrm{E}[X|\boldsymbol{Y}] \equiv \mathrm{E}[X|\mathcal{H}_{\boldsymbol{Y}}]$$

と定義する。同様に

$$P(A|\boldsymbol{Y}) \equiv P(A|\mathcal{H}_{\boldsymbol{Y}})$$
$$P(X \in A|\boldsymbol{Y}) \equiv P(X \in A|\mathcal{H}_{\boldsymbol{Y}})$$
$$\mu_{X|\boldsymbol{Y}}(A) \equiv \mu_{X|\mathcal{H}_{\boldsymbol{Y}}}(A)$$

と定義する。◂

13.2.1 等号条件による条件付き期待値・条件付き確率

補題 13.11 確率測度空間 $\Omega(\mathfrak{B}, P)$ と、その非負確率変数 X、n 次元確率変数 $\boldsymbol{Y}$ について

$$A \in \boldsymbol{B}_n, \quad \mathrm{E}_{X|\boldsymbol{Y}}(A) \equiv \mathrm{E}[I(\boldsymbol{Y} \in A)X]$$

と定義すると、$\boldsymbol{R}^n(\boldsymbol{B}_n, \mathrm{E}_{X|\boldsymbol{Y}})$ は測度空間を成し、$\mathrm{E}_{X|\boldsymbol{Y}}$ は $\boldsymbol{Y}$ の分布 $\mu_{\boldsymbol{Y}}$ に関して絶対連続（$\mathrm{E}_{X|\boldsymbol{Y}} \ll \mu_{\boldsymbol{Y}}$）である。

(proof)

非負性、$E_{X|\boldsymbol{Y}}(\emptyset) = 0$ は明らかである。加算加法性については

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}_{X|\boldsymbol{Y}}\left(\sum_{n=1}^{\infty} A_n\right) &= \mathrm{E}\left[I\left(\boldsymbol{Y} \in \sum_{n=1}^{\infty} A_n\right) X\right] \\
&= \int_{\boldsymbol{Y}^{-1}\left(\sum_{n=1}^{\infty} A_n\right)} X(\omega)P(d\omega) = \int_{\sum_{n=1}^{\infty} \boldsymbol{Y}^{-1}(A_n)} X(\omega)P(d\omega) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\boldsymbol{Y}^{-1}(A_n)} X(\omega)P(d\omega) \text{ 定理 7.30} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{E}_{X|\boldsymbol{Y}}(A_n)
\end{aligned}$$

より成立する。絶対連続性に関しては、$\forall N \in \boldsymbol{B}_n,\ \mu_{\boldsymbol{Y}}(N) = 0$ について、$\boldsymbol{Y}^{-1}(N)$ は零集合であるので

$$\mathrm{E}_{X|\boldsymbol{Y}}(N) = \int_{\boldsymbol{Y}^{-1}(N)} X(\omega)P(d\omega) = 0$$

である。よって示された。 証明終

定義 13.4 確率測度空間 $\Omega(\mathfrak{B}, P)$ と、その非負確率変数 X、確率変数 $\boldsymbol{Y}$ について

$$\mathrm{E}_{X|\boldsymbol{Y}}(A) \equiv \mathrm{E}[I(\boldsymbol{Y} \in A)X]$$

と定義すると、直前の補題より $\boldsymbol{R}^n(\boldsymbol{B}_n, \mathrm{E}_{X|\boldsymbol{Y}})$ は測度空間を成す。さらに、$\mathrm{E}_{X|\boldsymbol{Y}} \ll \mu_{\boldsymbol{Y}}$ なので、ラドン・ニコディムの定理??より $\boldsymbol{R}^n(\boldsymbol{B}_n, \mu_{\boldsymbol{Y}})$ との間に、ボレル関数であるラドン・ニコディム導関数 $\dfrac{d\mathrm{E}_{X|\boldsymbol{Y}}}{d\mu_{\boldsymbol{Y}}}$ が、ほとんど至るところ等しいものを同一視するとして一意に存在する。これを

$$\mathrm{E}[X|\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{y}] \equiv \frac{d\mathrm{E}_{X|\boldsymbol{Y}}}{d\mu_{\boldsymbol{Y}}}(\boldsymbol{y})$$

と表し、**条件付き期待値**という。

非負と限らない確率変数 X に対しては、$X = X^+ - X^-$ と二つの非負確率変数に分解することにより

$$\mathrm{E}[X|\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{y}] \equiv \mathrm{E}[X^+|\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{y}] - \mathrm{E}[X^-|\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{y}]$$

と定義する。◀

上記の定義は、以下のように言い換えられる。

定理 13.12 確率測度空間 $\Omega(\mathfrak{B}, P)$ と、その確率変数 X、n 次元確率変数 $\boldsymbol{Y}$ について、確率変数 $G(\boldsymbol{y})$ が

$$G \text{ はボレル関数（}\boldsymbol{B}_n\text{可測関数）}$$
$$\forall A \in \boldsymbol{B}_n, \quad \int_{\boldsymbol{Y}^{-1}(A)} X(\omega)P(d\omega) = \int_A G(\boldsymbol{y})\mu_{\boldsymbol{Y}}(d\boldsymbol{y})$$

の両方を満たすことと、$G(\boldsymbol{y}) = \mathrm{E}[X|\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{y}]\ a.e.$ であることは同値である。

補題 13.13 確率測度空間 $\Omega(\mathfrak{B}, P)$ と、その非負確率変数 X、確率変数 $\boldsymbol{Y}$ について $A_n \in \mathfrak{B} \quad (n = 1, \cdots)$ について

$$\mathrm{E}\left[I_{\left(\sum_{n=1}^{\infty} A_n\right)}\middle|\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{y}\right] = \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{E}[I_{A_n}|\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{y}]$$

(proof)
補題 13.2 と同様。詳細略。 証明終

定義 13.5 確率測度空間 $\Omega(\mathfrak{B}, P)$ と、その確率変数 X、n 次元確率変数 $\boldsymbol{Y}$、$A \in \mathfrak{B}$ について、$I_A(\omega) \equiv I(\omega \in A)$ として、**条件付き確率**を

$$P(A|\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{y}) \equiv \mathrm{E}[I_A|\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{y}]$$

と定義する。これは明らかに非負であり、$P(\emptyset|\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{y})=0,\ P(\Omega|\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{y})=1$ である。さらに直前の補題より加算加法性が成立するので、条件付き確率は確率測度である。したがって、通常の確率と同様に確率変数 X に対して

$$P(X\in A|\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{y})\equiv P(X^{-1}(A)|\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{y})=\mathrm{E}[I(X\in A)|\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{y}]$$

などが定義され、これによって**条件付き分布**も

$$\mu_{X|\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{y}}(A)\equiv P(X\in A|\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{y})$$

と定義される。さらに m をルベーグ測度として、$\mu_{X|\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{y}}\ll m$ ならばラドン・ニコディム導関数が存在して、それによって**条件付き（確率）密度関数**が

$$f_{X|\boldsymbol{Y}}(x|\boldsymbol{y})\equiv\frac{d\mu_{X|\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{y}}}{dm}(x)$$

と定義される。◂

この条件付き確率もやはり、条件付き確率測度による期待値に一致する。次の定理を参照せよ。

定理 13.14 確率測度空間 $\Omega(\mathfrak{B},P)$ と、その確率変数 X、n 次元確率変数 $\boldsymbol{Y}$ について

$$\mathrm{E}[X|\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{y}]=\int_\Omega X(\omega)P(d\omega|\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{y})$$

が成立する。

(proof)
定理 13.3 と同様。詳細略。 $\boxed{\text{証明終}}$

条件付き期待値として $\mathrm{E}[X|\boldsymbol{Y}]$ と $\mathrm{E}[X|\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{y}]$ を定義したが、両者の関係については、次の定理がある。

定理 13.15 確率測度空間 $\Omega(\mathfrak{B},P)$ と、その確率変数 X、n 次元確率変数 $\boldsymbol{Y}$ について

$$\mathrm{E}[X|\boldsymbol{Y}](\omega)=\mathrm{E}[X|\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{Y}(\omega)]$$

が成立する。

(proof)
$\mathrm{E}[X|\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{Y}(\omega)]$ について、定理 13.1 の条件を満たすことを示す。まず、$\mathcal{H}_{\boldsymbol{Y}}$ 可測性については、$\mathrm{E}[X|\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{y}]$ がボレル関数であり、$\boldsymbol{Y}$ が $\mathcal{H}_{\boldsymbol{Y}}$ 可測であることより、定理 6.7 より示される。もうひとつの条件については、まず

$$\mathcal{H}_{X|\boldsymbol{Y}}\equiv\left\{H\in\mathfrak{B};\int_H X(\omega)P(d\omega)=\int_H\mathrm{E}[X|\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{Y}(\omega)]P(d\omega)\right\}$$

と定義する。このとき、明らかに $\emptyset\in\mathcal{H}_{X|\boldsymbol{Y}}$ であり、定理 7.30 より加算加法性が成立する。また、任意の $B\in\boldsymbol{B}_n$ に対して

$$\begin{aligned}\int_{\boldsymbol{Y}^{-1}(B)}\mathrm{E}[X|\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{Y}(\omega)]P(d\omega)&=\int_\Omega I(\boldsymbol{Y}(\omega)\in B)\mathrm{E}[X|\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{Y}(\omega)]P(d\omega)\\&=\int_{\boldsymbol{R}}I(\boldsymbol{y}\in B)\mathrm{E}[X|\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{y}]\mu_{\boldsymbol{Y}}(d\boldsymbol{y})\\&=\int_B\mathrm{E}[X|\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{y}]\mu_{\boldsymbol{Y}}(d\boldsymbol{y})\\&=\int_{\boldsymbol{Y}^{-1}(B)}X(\omega)P(d\omega)\quad\because\text{定理 13.12}\end{aligned}$$

である。したがって、$\{A \in \mathfrak{B}; \boldsymbol{Y}(A) \in \boldsymbol{B}_n\} \subset \mathcal{H}_{X|\boldsymbol{Y}}$ である。また、$\boldsymbol{Y}$ はほとんど至るところ有界であるという前提であり、$\boldsymbol{Y}^{-1}(\boldsymbol{R})$ と Ω は零集合分の差しかないので

$$\begin{aligned}\int_{\Omega} \mathrm{E}[X|\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{Y}(\omega)]P(d\omega) &= \int_{\boldsymbol{Y}^{-1}(\boldsymbol{R})} \mathrm{E}[X|\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{Y}(\omega)]P(d\omega) \\ &= \int_{\boldsymbol{Y}^{-1}(\boldsymbol{R})} X(\omega)P(d\omega) \\ &= \int_{\Omega} X(\omega)P(d\omega)\end{aligned}$$

より、$\Omega \in \mathcal{H}_{X|\boldsymbol{Y}}$ である。これと積分の性質を使うことにより、$H \in \mathcal{H}_{X|\boldsymbol{Y}}$ ならば $H^c \in \mathcal{H}_{X|\boldsymbol{Y}}$ を示すことができる。以上をまとめると、$\mathcal{H}_{X|\boldsymbol{Y}}$ は加算加法族であり、$\{A \in \mathfrak{B}; \boldsymbol{Y}(A) \in \boldsymbol{B}_n\} \subset \mathcal{H}_{X|\boldsymbol{Y}}$ を満たしている。よって

$$\mathcal{H}_{\boldsymbol{Y}} = \sigma[\{A \in \mathfrak{B}; \boldsymbol{Y}(A) \in \boldsymbol{B}_n\}] \subset \sigma[\mathcal{H}_{X|\boldsymbol{Y}}] = \mathcal{H}_{X|\boldsymbol{Y}}$$

である。すなわち、$\forall H \in \mathcal{H}_{\boldsymbol{Y}}$ について

$$\int_H X(\omega)P(d\omega) = \int_H \mathrm{E}[X|\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{Y}(\omega)]P(d\omega)$$

となる。よって示された。 証明終

補題 13.16 確率測度空間 $\Omega(\mathfrak{B}, P)$ の n 次元確率変数 $\boldsymbol{Y}$ について、$A \in \boldsymbol{B}_n$ に対して $\mu_{\boldsymbol{Y}|\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{y}}(A) \equiv P(\boldsymbol{Y} \in A|\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{y})$ と定義すると

$$\mu_{\boldsymbol{Y}|\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{y}}(A) = I(\boldsymbol{y} \in A)$$

つまり、$\boldsymbol{y}$ に集積したディラック測度となっている。

(proof)

A がボレル集合なので $I(\boldsymbol{y} \in A)$ はボレル関数であると容易にわかる。また、$\forall B \in \boldsymbol{B}_n$ に対して

$$\begin{aligned}\int_{\boldsymbol{Y}^{-1}(B)} I(\boldsymbol{Y}(\omega) \in A)P(d\omega) &= \int_{\boldsymbol{Y}^{-1}(B)} I(\boldsymbol{Y}(\omega) \in A)P(d\omega) \\ &= \int_{\Omega} I(\boldsymbol{Y}(\omega) \in B)I(\boldsymbol{Y}(\omega) \in A)P(d\omega) \\ &= \int_{\Omega} I(\boldsymbol{y} \in B)I(\boldsymbol{y} \in A)\mu_{\boldsymbol{Y}}(d\boldsymbol{y}) \\ &= \int_B I(\boldsymbol{y} \in A)\mu_{\boldsymbol{Y}}(d\boldsymbol{y})\end{aligned}$$

なので、定理 13.12 より示される。 証明終

次の定理は、確率変数の等号条件による条件付き期待値における、系 13.6 に相当するものである。すなわち、条件付き期待値の中では、条件として与えられた確率変数は定数として扱えるということを表すものである。

定理 13.17 確率測度空間を $\Omega(\mathfrak{B}, P)$ の n 次元確率変数 $\boldsymbol{Y}$ と $\boldsymbol{B}_1$-可測関数 $g : \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}$ について

$$\mathrm{E}[g(Y)|Y = y] = g(y)$$

である。

(proof)
補題 13.16 より $A \in \boldsymbol{B}_n$ について $\mu_{\boldsymbol{Y}|\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{y}}(A) = I(\boldsymbol{y}; A)$ である。このとき

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}[g(\boldsymbol{Y})|\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{y}] &= \int_{\boldsymbol{R}^n} g(\boldsymbol{y}')\mu_{\boldsymbol{Y}|\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{y}}(d\boldsymbol{y}') \\
&= g(y) \quad \because \text{定理 } 7.35
\end{aligned}$$

である。 証明終

13.2.2 事象の条件付き期待値・確率

事象 C が発生した条件付き確率を考える。$\omega \in C \ \Leftrightarrow\ I_C(\omega) = 1$ であるので、すでに定義した確率変数の条件付き確率を用いて定義することができる。

定義 13.6 確率測度空間 $\Omega(\mathfrak{B}, P)$ と、その確率変数 X、$C \in \mathfrak{B}$ について、**事象 C が起こる条件での条件付き期待値**を

$$\mathrm{E}[X|C] \equiv \mathrm{E}[X|I_C = 1]$$

と定義する。同様に、条件付き確率・条件付き分布を

$$\begin{aligned}
P(A|C) &\equiv P(A|I_C = 1) \\
P(X \in A|C) &\equiv P(X \in A|I_C = 1) \\
\mu_{X|C}(A) &\equiv \mu_{X|I_C=1}(A)
\end{aligned}$$

と定義する。◂

定理 13.18 確率測度空間 $\Omega(\mathfrak{B}, P)$ とその非零集合 $C \in \mathfrak{B}$ に対して、確率測度 P は、ラドン・ニコディム導関数 $\dfrac{I_C(w)}{P(C)}$ によって、条件付き確率測度 $P(\cdot|C)$ に測度変換される。すなわち、確率変数 X に対して

$$E[X|C] = E\left[X\frac{I_C}{P(C)}\right] \ \left(= \int_\Omega X(w)\frac{I_C(w)}{P(C)}P(d\omega) = \frac{1}{P(C)}\int_C X(w)P(d\omega)\right)$$

が成立する。

(proof)
tower rule より

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}[I(I_C \in A)X] &= \mathrm{E}[\mathrm{E}[I(I_C \in A)X|I_C]] = \mathrm{E}[I(I_C \in A)\mathrm{E}[X|I_C]] \\
&= \int_\Omega I(y \in A)\mathrm{E}[X|I_C = y]\mu_{I_C}(dy) \\
&= \int_{\{0,1\}} I(y \in A)\mathrm{E}[X|I_C = y]\mu_{I_C}(dy) \quad \because \mu_{I_C}(\{0,1\}^c) = 0 \\
&= \int_{\{0\}} I(y \in A)\mathrm{E}[X|I_C = y]\mu_{I_C}(dy) + \int_{\{1\}} I(y \in A)\mathrm{E}[X|I_C = y]\mu_{I_C}(dy) \\
&= I(0 \in A)\mathrm{E}[X|I_C = 0]P(C^c) + I(1 \in A)\mathrm{E}[X|I_C = 1]P(C)
\end{aligned}$$

である。ここで $A = \{1\}$ とすると

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}[I(I_C = 1)X] &= \mathrm{E}[X|I_C = 1]P(C) \\
\mathrm{E}[I_C X] &= \mathrm{E}[X|C]P(C)
\end{aligned}$$

である。よって示された。 証明終

系 13.19 確率測度空間 $\Omega(\mathfrak{B}, P)$ と $A \in \mathfrak{B}$、非零集合 $C \in \mathfrak{B}$ に対して

$$P(A|C) = \frac{P(A \cap C)}{P(C)}$$

が成立する。

定理 13.20 確率測度空間 $\Omega(\mathfrak{B}, P)$ とその確率変数 X について、$\sum_i H_i = \Omega$ ならば

$$\mathrm{E}[X] = \sum_i P(H_i)\mathrm{E}[X|H_i]$$

となる。

(proof)
可算加法性を用いて

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}[X] = \int_\Omega X(\omega)P(d\omega) &= \int_{\sum_i H_i} X(\omega)P(d\omega) \\
&= \sum_i \int_{H_i} X(\omega)P(d\omega) \quad \because \text{定理 } 7.30 \\
&= \sum_i \mathrm{E}[I_{H_i} X] \\
&= \sum_i P(H_i)\mathrm{E}[X|H_i]
\end{aligned}$$

となる。 $\boxed{\text{証明終}}$

系 13.21 （全確率の定理）確率測度空間 $\Omega(\mathfrak{B}, P)$ において、$\sum_i H_i = \Omega$ ならば

$$P(A) = \sum_i P(H_i)P(A|H_i)$$

となる。

下のベイズの定理は、条件を入れ替えた確率の計算法を示している。

定理 13.22 （ベイズの定理）確率測度空間 $\Omega(\mathfrak{B}, P)$ において、$\sum_i H_i = \Omega$ であるとき、$P(A) \neq 0$ ならば

$$P(H_i|A) = \frac{P(H_i)P(A|H_i)}{\sum_j P(H_j)P(A|H_j)} = \frac{P(H_i)P(A|H_i)}{P(A)}$$

が成立する。

(proof)
条件付き確率の定義より

$$\begin{aligned}
P(H_i|A) &= \frac{P(A \cap H_i)}{P(A)} \\
&= \frac{P(H_i)P(A|H_i)}{P(A)} \\
&= \frac{P(H_i)P(A|H_i)}{\sum_j P(H_j)P(A|H_j)} \quad \because \text{全確率の定理}
\end{aligned}$$

となる。 $\boxed{\text{証明終}}$

たとえば、背反事象列 $H_1, H_2, \cdots$ が原因で事象 A が結果であるとする。そのとき H_i が原因である確率は $P(H_i|A)$ であるが、ベイズの定理は、事象 H_i が実現したときに事象 A が実現する確率 $P(A|H_i)$ と、H_i が実現する確率 $P(H_i)$ から間接的にそれを求める方法を提供している。このとき、事象 A の実現を基準として、$P(H_i)$ を**事前確率**、$P(H_i|A)$ を**事後確率**という。

定理 13.23 確率測度空間 $\Omega(\mathfrak{B}, P)$ とその確率変数 X, Y、$A, B \in \mathfrak{B}$ について

$$P(X \in A|Y \in B) = \mathrm{E}\left[\frac{I(Y \in B)}{P(Y \in B)} P(X \in A|Y)\right]$$

である。

(proof)
計算すると

$$\begin{aligned}
P(X \in A|Y \in B) &= \frac{1}{P(Y \in B)} P(X \in A, Y \in B) \\
&= \frac{1}{P(Y \in B)} \mathrm{E}[I(X \in A)I(Y \in B)] \\
&= \frac{1}{P(Y \in B)} \mathrm{E}[\mathrm{E}[I(X \in A)I(Y \in B)|Y]] \quad \because \text{tower rule} \\
&= \mathrm{E}\left[\frac{I(Y \in B)}{P(Y \in B)} \mathrm{E}[I(X \in A)|Y]\right] \\
&= \mathrm{E}\left[\frac{I(Y \in B)}{P(Y \in B)} P(X \in A|Y)\right]
\end{aligned}$$

より成立する。 $\boxed{\text{証明終}}$

補題 13.24 確率測度空間 $\Omega(\mathfrak{B}, P)$ とその確率変数 X, Y、$A, B \in \mathfrak{B}$ について

$$P(X \in A, Y \in B) = \int_B P(X \in A|Y = y)\mu_Y(dy)$$

である。

定理 13.25 確率測度空間 $\Omega(\mathfrak{B}, P)$ の確率変数 X, Y について、X, Y の同時密度関数を $f(x, y)$、Y の周辺密度関数を $f_Y(y)$、条件付き密度関数を $f_{X|Y}(x, y)$ として

$$f_{X|Y}(x, y) = \frac{f(x, y)}{f_Y(y)}$$

である。

(proof)
m を 1 次元ルベーグ測度、m_2 を 2 次元ルベーグ測度として、集合族 M を

$$M \equiv \left\{A \in \boldsymbol{B}_2; P((X, Y) \in A) = \int_A f_{X|Y}(x, y) f_Y(y) m_2(dx, dy)\right\}$$

と定義する。積分と測度の性質より、M は加算加法族である。ここで、$\forall A = [\alpha_x, \beta_x) \times [\alpha_y, \beta_y) \in \boldsymbol{J_2}$ とすると、直前の系より

$$\begin{aligned}
P((X,Y) \in A) = P(X \in [\alpha_x, \beta_x), Y \in [\alpha_y, \beta_y)) &= \int_{[\alpha_y,\beta_y)} P(X \in [\alpha_x, \beta_x) | Y = y) \mu_Y(dy) \\
&= \int_{[\alpha_y,\beta_y)} \left\{ \int_{[\alpha_x,\beta_x)} f_{X|Y}(x,y) m(dx) \right\} f_Y(y) m(dy) \\
&= \int_A f_{X|Y}(x,y) f_Y(y) m_2(dx,dy) \quad \because \text{フビニの定理}
\end{aligned}$$

であるので、$\boldsymbol{J}_2 \subset M$ である。よって、定理 5.5 より

$$\boldsymbol{B_2} = \sigma[\boldsymbol{J}_2] \subset \sigma[M] = M$$

である。つまり、$\forall A \in \boldsymbol{B_2}$ に対して

$$P((X,Y) \in A) = \int_A f_{X|Y}(x,y) f_Y(y) m_2(dx,dy)$$

が成立するので、$f(x,y) = f_{X|Y}(x,y) f_Y(y)$ である。よって示された。 証明終

13.2.3 独立性関係

定理 13.26 確率測度空間 $\Omega(\mathfrak{B}, P)$ と、その確率変数 X、n 次元確率変数 $\boldsymbol{Y}$ について、$X, \boldsymbol{Y}$ が独立ならば

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}[X|\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{y}] &= \mathrm{E}[X] \\
\mathrm{E}[X|\boldsymbol{Y}](\omega) &= \mathrm{E}[X]
\end{aligned}$$

が成立する。

(proof)

$X, \boldsymbol{Y}$ が独立なので、$\forall A \in \boldsymbol{B}_n$ に対して $I(\boldsymbol{x} \in A)$ はボレル関数であるため、$X, I(\boldsymbol{Y} \in A)$ も独立である。したがって

$$\begin{aligned}
\int_{\boldsymbol{Y}^{-1}(A)} X(\omega) P(d\omega) &= \mathrm{E}[I(\boldsymbol{Y} \in A) X] \\
&= \mathrm{E}[I(\boldsymbol{Y} \in A)] E X] \\
&= \int_A \mathrm{E}[X] \mu_{\boldsymbol{Y}}(d\boldsymbol{y})
\end{aligned}$$

であり、定数 $\mathrm{E}[X]$ の $\boldsymbol{B}_n$ 可測性は明らかなので、定理 13.12 より $\mathrm{E}[X|\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{y}] = \mathrm{E}[X]$ である。また、したがって、$\mathrm{E}[X|\boldsymbol{Y}] = \mathrm{E}[X|\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{Y}(\omega)] = \mathrm{E}[X]$ である。 証明終

密度関数が存在する場合には非常にわかりやすい。

定理 13.27 確率測度空間 $\Omega(\mathfrak{B}, P)$ の確率変数 X, Y について、X の周辺密度関数を $f_X(y)$、条件 $Y = y$ 付きの X の条件付き密度関数を $f_{X|Y}(x,y)$ として、これらがリーマン積分可能であるとする。このとき、X, Y が独立であることと

$$f_{X|Y}(x,y) = f_X(x)$$

であることは同値である。

(proof)

X, Y が独立ならば

$$\begin{aligned} f_{X|Y}(x|y) &= \frac{f(x,y)}{f_Y(y)} \\ &= \frac{f_X(x)f_Y(y)}{f_Y(y)} \\ &= f_X(x) \end{aligned}$$

である。

逆に、$f_{X|Y}(x,y) = f_X(x)$ ならば $\dfrac{f(x,y)}{f_Y(y)} = f_X(x)$ つまり

$$f(x,y) = f_X(x)f_Y(y) \quad a.e.$$

であり、定理 12.18 より X, Y は独立である。 証明終

14　分布関数

定義 14.1 確率測度空間 $\Omega(\mathfrak{B}, P)$ の確率変数 X について、その **（累積）分布関数**を

$$F_X(x) \equiv P(X \leq x)$$

と定義する。また、n 次元確率変数 $\boldsymbol{X} = (X_1, \cdots, X_n)^T$ について、その（累積）分布関数を

$$F_{\boldsymbol{X}}(x_1, \cdots, x_n) \equiv P(X_1 \leq x_1, \cdots, X_n \leq x_n)$$

と定義する。分布関数は明らかに 0 から 1 の値をとり、広義単調増加である。◀

14.1　分布関数の基本的性質

定理 14.1 確率測度空間 $\Omega(\mathfrak{B}, P)$ の n 次元確率変数 $\boldsymbol{X}$ について、分布関数を F とするとき、$\boldsymbol{X}$ にリーマン積分可能な（同時）密度関数 f が存在するならば

$$f(x_1, \cdots, x_n) = \frac{\partial^n F}{\partial x_1 \cdots \partial x_n}(x_1, \cdots, x_n)$$

である。

(proof)
（同時）密度関数を用いれば

$$\begin{aligned} F(x_1, \cdots, x_n) &= P(X_1 \leq x_1, \cdots, X_n \leq x_n) \\ &= \int_{-\infty}^{x_1} dx'_1 \cdots \int_{-\infty}^{x_n} dx'_n \ f(x'_1, \cdots, x'_n) \end{aligned}$$

なので、リーマン積分の性質より

$$f(x_1, \cdots, x_n) = \frac{\partial^n F}{\partial x_1 \cdots \partial x_n}(x_1, \cdots, x_n)$$

である。 証明終

定理 14.2 分布関数は、一つの変数に対して右連続である。

(proof)
一次元分布関数を考えれば十分である。分布関数を $F(x) = P(X \leq x)$ とおく。任意の実数 a をとり、上から任意の実数 a に収束する任意の数列を $\{x_n\}$ とする。右連続であるには $\lim_{n\to\infty} F(x_n) = F(a)$ であればよい。

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} F(x_n) = \lim_{n\to\infty} P(X \leq x_n) &= \lim_{n\to\infty} P(X^{-1}(-\infty, x_n]) \\ &= P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} X^{-1}(-\infty, x_n]\right) \quad \because \text{単調極限定理 2.10} \\ &= P\left(X^{-1}(-\infty, a]\right) \\ &= F(a) \end{aligned}$$

であり、確かに示された。 証明終

逆に、左からは連続とは限らず、その不連続な跳躍が一点の確率に相当する。

定理 14.3 確率測度空間 $\Omega(\mathfrak{B}, P)$ の確率変数 X とその分布関数 F について確率関数 $p(x) = P(X = x)$ は

$$p(x) = F(x) - \lim_{t \to x-0} F(t)$$

で求められる。

(proof)

x に下から収束する数列を $\{t_n\}$ とすると、$[x, x] = \bigcap_{n=1}^{\infty} (t_n, x]$ なので

$$\begin{aligned}
p(x) = P(X = x) &= P(X^{-1}[x, x]) \\
&= P\left(X^{-1}[x, x]\right) \\
&= P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} X^{-1}(t_n, x]\right) \\
&= \lim_{n \to \infty} P\left(X^{-1}(t_n, x]\right) \quad \because \text{単調極限定理 2.10} \\
&= \lim_{n \to \infty} \{F(x) - F(t_n)\} \\
&= F(x) - \lim_{t \to x-0} F(t)
\end{aligned}$$

である。 証明終

系 14.4 連続確率変数の分布関数は連続である。

14.2 分布と分布関数の一対一対応

確率測度空間 $\Omega(\mathfrak{B}, P)$ の確率変数 X について、その分布 $\boldsymbol{R}(\boldsymbol{B}_1, \mu_X)$ と分布関数 $F(x)$ は、次の意味で一対一で対応している。すなわち、分布からは明らかに分布関数 $F(x) = \mu_X((-\infty, x])$ を得ることができ、こちらは自明でないが、実は逆に分布関数から分布 μ_X を構成することができる。このことによって、分布関数は分布のすべての情報を持っていると考えられるのである。以下では、分布関数から分布を構成する方法を見る。なお、この部分では、分布関数の定義上、**半開区間として他とは逆向きのもの**$(\alpha, \beta]$ を用いることに注意されたい。

定義 14.2 単調増加関数 $F : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ と半開区間 $I = (\alpha, \beta]$ について

$$|I|_F \equiv F(\beta) - F(\alpha)$$

と定義する[26]。これは単調性より明らかに非負である。また、$A \subset \boldsymbol{R}$ について、単調増加関数 F から導かれた外測度 F^* を、$\{I_n\}$ を半開区間列として

$$F^*(A) \equiv \inf_{A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n} \sum_{n=1}^{\infty} |I_n|_F$$

と定義する。◀

F^* の定義はルベーグ外測度とほとんど同じであり、異なるのは $|I|_F$ の部分である。上において、$F(x) = x$ の場合がルベーグ外測度に相当する。(半開区間が逆向きだが本質的ではない。) 補題 4.14 や定理 4.15 の証明は、F^* の場合も全く同様に使えるので、次のことが言える。

[26] 一般的な記法ではないはずである

定理 14.5 単調増加関数 $F : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ に対して、単調増加関数 F から導かれた外測度 F^* はカラテオドリ外測度である。

よって、すでに見たように、ここから完備測度空間を定義できる。

定義 14.3 単調増加関数 $F : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ が与えられると、カラテオドリ外測度の議論より、$A \subset \boldsymbol{R}$ について、$\forall E \subset \boldsymbol{R}$ に対して $F^*(E) = F^*(E \cap A) + F^*(E \cap A^c)$ を満たす場合、A が可測であると定義し、その場合には $F(A) \equiv F^*(A)$ とすることによって、完備測度空間 $\boldsymbol{R}(\mathfrak{B}, F)$ を構成することができる。以下では、この測度空間 $\boldsymbol{R}(\mathfrak{B}, F)$ を**単調増加関数 F から導かれた測度空間**という。◀

補題 14.6 $F : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ を右連続な単調増加関数とする。このとき、任意の半開区間 $I = (\alpha, \beta]$ と $t < |I|_F$ なる任意の t に対して

$$J \subset I,\ t < |J|_F$$

なる半開区間 J が存在する。

(proof)
数列 $\{a_n\}$ を

$$a < \cdots a_2 < a_1 < \cdots < b,\ \lim_{n\to\infty} a_n = a$$

となるようとり、数列 $\{b_n\}$ を

$$\begin{cases} b_n = a & b\text{ が有限のとき} \\ b_1 < a_b < \cdots,\ \lim_{n\to\infty} b_n = \infty & \end{cases}$$

となるようとる。このとき

$$\begin{aligned} |I|_F &= F(b) - F(a) \\ &= \lim_{n\to\infty} F(b_n) - F(a) \\ &= \lim_{n\to\infty} \{F(b_n) - F(a_n)\} \quad \because \text{右連続性} \\ &= \lim_{n\to\infty} |(a_n, b_n]|_F \end{aligned}$$

なので、十分大きい N に対して

$$t < |(a_N, b_N]|_F$$

であり、また定義より $(a_N, b_N] \subset I$ である。これを J にすればよい。よって示された。 証明終

定理 14.7 $F : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ を右連続な単調増加関数とし、それから導かれた外測度を F^* とする。これらについて、I を半開区間として

$$F^*(I) = |I|_F$$

が成立する。

(proof)
F^* の定義より $F^*(I) \leq |I|_F$ は明らかである。ここで、$F^*(I) < |I|_F$ であると仮定すると、直前の補題より

$$F^*(I) < |J|_F,\ J \subset I$$

なる半開区間 J が存在する。ところが $\{J_n\}$ を半開区間列として

$$F^*(I) = \inf_{I \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} J_n} \sum_{n=1}^{\infty} |J_n|_F$$

において、 $I \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} J_n$ という条件については、$J \subset I$ なので、半開区間列 J_n には必ず J が入っていると考えてもよい。（下限に到達できる。）したがって

$$\begin{aligned} F^*(I) &= \inf_{I \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} J_n} \sum_{n=1}^{\infty} |J_n|_F \\ &\geq \inf_{I \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} J_n} |J|_F = |J|_F \end{aligned}$$

であり、$F^*(I) < |J|_F$ に矛盾する。したがって、$F^*(I) \geq |I|_F$ であり、最初と合わせて $F^*(I) = |I|_F$ である。 証明終

補題 14.8 $F : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ を単調増加関数とし、それから導かれた測度空間を $\boldsymbol{R}(\mathfrak{B}, F)$ とするとき、半開区間は可測集合である。

(proof)

任意の半開区間を I とし、F から導かれた外測度を F^* とおく。任意の $E \subset \boldsymbol{R}$ に対して $E \subset \displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} J_n$ となる半開区間列 $\{J_n\}$ による覆い方を考える。

$$J_n = J_n \cap I + J_n \cap I^c$$

であり、$J_n \cap I$ は半開区間の共通部分なので半開区間であり、I^c は二つの半開区間の直和の形 $I^c = I_1 + I_2$ で表されるので、$J_n \cap I^c = J_n \cap I_1^c + J_n \cap I_2^c$ は多くて二つの半開区間の直和であり、$J_n \cap I_1, J_n \cap I, J_n \cap I_2$ と並べると全体は J_n に一致する。したがって

$$|J_n|_F = |J_n \cap I_1|_F + |J_n \cap I|_F + |J_n \cap I_2|_F$$

であり、これから

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} |J_n|_F &= \sum_{n=1}^{\infty} |J_n \cap I_1|_F + \sum_{n=1}^{\infty} |J_n \cap I|_F + \sum_{n=1}^{\infty} |J_n \cap I_2|_F \\ &\geq F^*(E \cap I_1) + F^*(E \cap I) + F^*(E \cap I_2) \quad \because E \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} J_n \\ &\geq F^*(E \cap I) + F^*(E \cap I^c) \quad \because \text{劣加法性} \end{aligned}$$

が J_n の取り方によらず成立するので、下限をとることにより

$$F^*(E) \geq F^*(E \cap I) + F^*(E \cap I^c)$$

であり、定理 3.3 より I は可測である。 証明終

よって、加算加法族の性質より、次のことが成立する。

定理 14.9 $F : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ を単調増加関数とし、それから導かれた測度空間を $\boldsymbol{R}(\mathfrak{B}, F)$ とするとき、$\boldsymbol{B}_1 \subset \mathfrak{B}$ すなわち、ボレル集合は可測である。

以上のことをまとめると、右連続な単調増加関数 $F : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ をとり、そこから外測度 F^* を定義することによって、測度空間 $\boldsymbol{R}(\mathfrak{B}, F)$ $(\boldsymbol{B}_1 \subset \mathfrak{B})$ を構成できる。加算加法族でありさえすれば、可測集合族を制限してもよいので、測度空間 $\boldsymbol{R}(\boldsymbol{B}_1, F)$ を考えることもできる。さらに、$F(x) = P(X \leq x)$ つまり分布関数を用いると、$\boldsymbol{R}(\boldsymbol{B}_1, F)$ が X の分布そのものになることを示す。

定理 14.10 確率測度空間$\Omega(\mathfrak{B}, P)$の確率変数Xとその分布μ_Xについて、$F(x) = P(X \leq x)$つまり X の分布関数とおくと、これは右連続単調増加関数であり、これから導かれる測度空間を $\boldsymbol{R}(\boldsymbol{B}_1, F)$ とすると、$\forall A \in \boldsymbol{B}_1$ に対して

$$F(A) = \mu_X(A)$$

が成り立つ、すなわち、分布関数 $F(x)$ から導かれる測度空間は X の分布になる。

(proof)

定理 14.7 より半開区間 I については

$$F(I) = |I|_F = P(X \in I) = \mu_X(I)$$

が成り立つ。また、測度 F の有限加法性より、有限個の半開区間の直和についても定理は成り立つ。したがって、有限個の半開区間の直和全体による集合族を S とし

$$M = \{A \in \boldsymbol{B}_1; F(A) = \mu_X(A)\}$$

とおくと、$S \subset M$ である。また、M 上の増加列もしくは減少列 $\{A_n\}$ について

$$\begin{aligned}
F(\lim_n A_n) &= \lim_{n\to\infty} F(A_n) \quad \because \text{単調極限定理 2.10} \\
&= \lim_{n\to\infty} \mu_X(A_n) \quad \because A_n \in M \\
&= \mu_X(\lim_n A_n) \quad \because \text{単調極限定理}
\end{aligned}$$

であるので、M は単調族である。したがって、定理 9.6 より

$$\boldsymbol{B}_1 = \sigma[S] \subset M$$

である、つまり、任意の $A \in \boldsymbol{B}_1$ について $F(A) = \mu_X(A)$ が成立する。 $\boxed{\text{証明終}}$

以上によって、分布関数 $F(x) = P(X \leq x)$ から、分布を構成する一般的な方法が導かれる。まとめると以下のようになる。

1. 分布関数 $F(x)$ から $\{I_n\}$ を半開区間列として、外測度 F^* を

$$F^*(A) \equiv \inf_{A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n} |I_n|_F$$

によって定義する。

2. ボレル集合に対して、外測度 F^* をもって測度とすることで、測度空間 $\boldsymbol{R}(\boldsymbol{B}_1, F)$ を定義すると、これがまさに分布そのものである。

こうやって分布関数 $F(x)$ から得た測度 F による積分

$$\int_A g(x) F(dx)$$

は、分布関数によるルベーグ・スティルチェス積分と言われる。分布関数に限らず、ルベーグ・スティルチェス積分は二つの単調増加関数の差としてあらわされる関数によるものまで自然に拡張できることがわかるだろう。上に述べた分布関数によるルベーグ・スティルチェス積分は、分布による積分と全く同じであり、期待値を表現することができるので、分布による積分を上のように表記する場合もある。

ただし、これはみれば明らかなように、実際の計算向きではない。実際的な方法は、分布関数を微分することによって密度関数が得られるときに、密度関数の積分によって分布を得る方法であろう。

14.3 分布関数の諸性質

14.3.1 独立性関係

定理 14.11 確率測度空間 $\Omega(\mathfrak{B}, P)$ の確率変数 $X_1, \cdots, X_n$ と、そのそれぞれの分布関数 $F_i(x_i)$ および同時分布関数 $F(x_1, \cdots, x_n)$ について、$F(x_1, \cdots, x_n) = F_1(x_1) \cdots F_n(x_n)$ であるとき

$$\{F_1(\beta_1) - F_1(\alpha_1)\} \cdots \{F_n(\beta_n) - F_n(\alpha_n)\} = P(X_1 \in (\alpha_1, \beta_1], \cdots, X_n \in (\alpha_n, \beta_n])$$

が成立する。

(proof)
言葉で説明するのは難しいが、具体例をいくつか計算すれば理解できるはずである。例えば、$n = 1$ のときは明らかである。$n = 2$ のときは

$$\begin{aligned}
P(X_1 \in (\alpha_1, \beta_1], X_2 \in (\alpha_2, \beta_2]) &= F(\beta_1, \beta_2) - F(\alpha_1, \beta_2) - F(\beta_1, \alpha_2) + F(\alpha_1, \alpha_2) \\
&= F_1(\beta_1)F_2(\beta_2) - F_1(\alpha_1)F_2(\beta_2) - F_1(\beta_1)F_2(\alpha_2) + F_1(\alpha_1)F_2(\alpha_2) \\
&= F_1(\beta_1)\{F_2(\beta_2) - F_2(\alpha_2)\} - F_1(\alpha_1)\{F_2(\beta_2) - F_2(\alpha_2)\} \\
&= \{F_1(\beta_1) - F_1(\alpha_1)\}\{F_2(\beta_2) - F_2(\alpha_2)\}
\end{aligned}$$

である。以下試みよ。 $\boxed{\text{証明終}}$

上の事実を利用して、$F(x_1, \cdots, x_n) = F_1(x_1) \cdots F_n(x_n)$ の場合に、分布関数から同時分布を構築することができる。

定義 14.4 単調増加関数列 $F_1, \cdots, F_n : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ と半開区間 $I = (\alpha_1, \beta_1] \times \cdots \times (\alpha_n, \beta_n]$ について

$$|I|_{\{F_i\}} \equiv \{F_1(\beta_1) - F_1(\alpha_1)\} \cdots \{F_n(\beta_n) - F_n(\alpha_n)\}$$

と定義する。これは単調性より明らかに非負である。また、$A \subset \boldsymbol{R^n}$ について、単調増加関数列 $\{F_i\}$ から導かれた外測度 F^* を、$\{I_n\}$ を $\boldsymbol{R^n}$ の半開区間列として

$$F^*(A) \equiv \inf_{A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n} \sum_{n=1}^{\infty} |I_n|_{\{F_i\}}$$

と定義する。◂

やはり、1 次元のときと同様にして以下が示される。

定理 14.12 単調増加関数列 $F_1, \cdots, F_n : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ と単調増加関数列 $\{F_i\}$ から導かれた外測度 F^* はカラテオドリ外測度である。

定義 14.5 単調増加関数列 $F_1, \cdots, F_n : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ が与えられると、カラテオドリ外測度の議論より、$A \subset \boldsymbol{R^n}$ について、$\forall E \subset \boldsymbol{R^n}$ に対して $F^*(E) = F^*(E \cap A) + F^*(E \cap A^c)$ を満たす場合、A が可測であると定義し、その場合には $F(A) \equiv F^*(A)$ とすることによって、完備測度空間 $\boldsymbol{R^n}(\mathfrak{B}, F)$ を構成することができる。以下では、この測度空間 $\boldsymbol{R^n}(\mathfrak{B}, F)$ を**単調増加関数列** $\{F_i\}$ **から導かれた測度空間**という。◂

一次元の場合とだいたい同様か、一次元の場合の定理を利用して、以下は自然に示される。

補題 14.13 $F_1, \cdots, F_n : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ を左連続な単調増加関数列とする。このとき、任意の $\boldsymbol{R^n}$ の半開区間 I と $t < |I|_{\{F_i\}}$ なる任意の t に対して

$$J \subset I,\ t < |J|_{\{F_i\}}$$

なる半開区間 $J \subset \boldsymbol{R^n}$ が存在する。

定理 14.14 $F_1, \cdots, F_n : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ を左連続な単調増加関数列とし、それから導かれた外測度を F^* とする。これらについて、I を半開区間として

$$F^*(I) = |I|_{\{F_i\}}$$

が成立する。

補題 14.15 $F_1, \cdots, F_n : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ を単調増加関数列とし、それから導かれた測度空間を $\boldsymbol{R^n}(\mathfrak{B}, F)$ とするとき、半開区間は可測集合である。

定理 14.16 $F_1, \cdots, F_n : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ を単調増加関数列とし、それから導かれた測度空間を $\boldsymbol{R^n}(\mathfrak{B}, F)$ とするとき、$\boldsymbol{B}_n \subset \mathfrak{B}$ すなわち、ボレル集合は可測である。

$F(x_1, \cdots, x_n) = F_1(x_1) \cdots F_n(x_n)$ のときに周辺分布関数 F_i を単調増加関数列に用いると、$\boldsymbol{R}(\boldsymbol{B}_1, F)$ が $X_1, \cdots, X_n$ の同時分布そのものになることを示される。

定理 14.17 確率測度空間 $\Omega(\mathfrak{B}, P)$ の確率変数 $\boldsymbol{X} = (X_1, \cdots, X_n)^T$ とその同時分布 $\mu_{\boldsymbol{X}}$ について、F を $\boldsymbol{X}$ の同時分布関数、F_i を X_i の分布関数として、$F(x_1, \cdots, x_n) = F_1(x_1) \cdots F_n(x_n)$ が成立するとき、単調増加関数列 $\{F_1, \cdots, F_n\}$ から導かれる測度空間を $\boldsymbol{R^n}(\boldsymbol{B}_n, F)$ とすると、$\forall A \in \boldsymbol{B}_n$ に対して

$$F(A) = \mu_{\boldsymbol{X}}(A)$$

が成り立つ、すなわち、周辺分布の関数列から導かれる測度空間は $\boldsymbol{X} = (X_1, \cdots, X_n)^T$ の同時分布になる。

(proof)

定理 14.14 及び定理 14.11 より半開区間 $I \subset \boldsymbol{R^n}$ については

$$F(I) = |I|_{\{F_i\}} = P(\boldsymbol{X} \in I) = \mu_{\boldsymbol{X}}(I)$$

が成り立つ。また、測度 F の有限加法性より、有限個の半開区間の直和についても定理は成り立つ。したがって、有限個の半開区間の直和全体による集合族を S とし

$$M = \{A \in \boldsymbol{B}_n; F(A) = \mu_{\boldsymbol{X}}(A)\}$$

とおくと、$S \subset M$ である。また、M 上の増加列もしくは減少列 $\{A_n\}$ について

$$\begin{aligned} F(\lim_n A_n) &= \lim_{n\to\infty} F(A_n) & &\because \text{単調極限定理 2.10} \\ &= \lim_{n\to\infty} \mu_X(A_n) & &\because A_n \in M \\ &= \mu_X(\lim_n A_n) & &\because \text{単調極限定理} \end{aligned}$$

であるので、M は単調族である。したがって、定理 9.6 より

$$\boldsymbol{B}_n = \sigma[S] \subset M$$

である、つまり、任意の $A \in \boldsymbol{B}_n$ について $F(A) = \mu_{\boldsymbol{X}}(A)$ が成立する。 証明終

また、定理 5.17 と同様にして、以下も示される。

補題 14.18 確率測度空間 $\Omega(\mathfrak{B}, P)$ の確率変数 $\boldsymbol{X} = (X_1, \cdots, X_n)^T$ と確率変数 X_i の周辺分布 μ_i $(i = 1, \cdots, n)$ 及び分布関数 F_i について、単調増加関数列 $\{F_i\}$ から導かれる測度空間を $\boldsymbol{R^n}(\mathfrak{B}, F)$ とする。このとき、$A_1, \cdots, A_n \in \boldsymbol{B}_1$ について、

$$F(A_1 \times \cdots \times A_n) = \mu_1(A_1) \cdots \mu_n(A_n)$$

となる。

したがって、この二つの定理と補題を合わせせると次のことが言える。

定理 14.19 確率測度空間 $\Omega(\mathfrak{B}, P)$ の確率変数 $X_1, \cdots, X_n$ と、そのそれぞれの分布関数 $F_i(x_i)$ および同時分布関数 $F(x_1, \cdots, x_n)$ について、$X_1, \cdots, X_n$ が独立であることと

$$F(x_1, \cdots, x_n) = F_1(x_1) \cdots F_n(x_n)$$

となることは同値である。

(proof)

$X_1, \cdots, X_n$ が独立であるときは

$$\begin{aligned} F(x_1, \cdots, x_n) &= P(X_1 \leq x_1, \cdots, X_n \leq x_n) \\ &= P(X_1 \leq x_1) \cdots P(X_n \leq x_n) \\ &= F_1(x_1) \cdots F_n(x_n) \end{aligned}$$

より容易に示される。

逆に、$F(x_1, \cdots, x_n) = F_1(x_1) \cdots F_n(x_n)$ であるとき。二つ前の定理が使えて、$\mu_{\boldsymbol{X}}$ を確率変数 $\boldsymbol{X} = (X_1, \cdots, X_n)^T$ の同時分布、$\boldsymbol{R^n}(\boldsymbol{B}_n, F)$ を単調増加関数列 $\{F_1, \cdots, F_n\}$ から導かれる測度空間とすると、$\forall A \in \boldsymbol{B}_n$ に対して

$$F(A) = \mu_{\boldsymbol{X}}(A)$$

が成り立つ。したがって、$A_1, \cdots, A_n \in \boldsymbol{B}_1$ として

$$\begin{aligned} P(X_1 \in A_1, \cdots, X_n \in A_n) &= \mu_{\boldsymbol{X}}(A_1 \times \cdots \times A_n) \\ &= F(A_1 \times \cdots \times A_n) \\ &= \mu_1(A_1) \cdots \mu_n(A_n) \quad \because \text{直前の補題} \\ &= P(X_1 \in A_1) \cdots P(X_n \in A_n) \end{aligned}$$

であり、確かに $X_1, \cdots, X_n$ は独立である。 $\boxed{\text{証明終}}$

第 IV 部
付録

A　上限・下限・上極限・下極限

A.1　実数の上限・下限

定義 A.1 実数の上に部分集合 X が与えられたとき、実数 a が以下の条件

1. $b \in X$ なら $b \leq a$
2. $c < a$ なら $c < x$ なる $x \in X$ が存在する

を満たせば、a を X の**上限**であるといい、$a = \sup X$ と表す。◂

定義 A.2 実数の上に部分集合 X が与えられたとき、実数 a が以下の条件

1. $b \in X$ なら $b \geq a$
2. $a < c$ なら $x < c$ なる $x \in X$ が存在する

を満たせば、a を X の**下限**であるといい、$a = \inf X$ と表す。◂

定理 A.1 上限及び下限は一意的である。

(proof)
容易。証明略。 $\boxed{\text{証明終}}$

命題 A.1 実数に関しては、上に有界な部分集合は必ず上限を持ち、下に有界な部分集合は必ず下限を持つ。このことを、実数は**順序完備**であるという。これは、実数の公理のひとつである。

ただし、実数の部分集合 X に対し、上限 $\sup X$ 及び下限 $\inf X$ は、必ずしも X には属さないことには注意が必要である。それに対し、最大値・最小値は存在するとは限らない。上限 $\sup X$ 及び下限 $\inf X$ が X に属せば、それらはそれぞれ最大値・最小値である。上限及び下限は一意的なので、最大値・最小値が存在すれば、それらはまた上限・下限に等しい。

A.2　数列の上限・下限

数列に対しても、数列を実数の集合とみなすことで、上限・下限を定義できる。

定理 A.2 実数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ について すべての n について $a_n \leq b_n$ なら

$$\sup_n a_n \leq \sup_n b_n \quad \inf_n a_n \leq \inf_n b_n$$

(proof)
上限について。$\sup_n a_n > \sup_n b_n$ と仮定すると、上限の定義より $\sup_n b_n < a_m$ となる数列 $\{a_n\}$ の項 a_m が存在する。このとき、条件より $\sup_n b_n < a_m \leq b_m$ となることになり、上限 $\sup_n b_n$ の定義に矛盾する。したがって $\sup_n a_n \leq \sup_n b_n$ である。下限についても同様。 $\boxed{\text{証明終}}$

定理 A.3 実数列 $\{a_n\}$ について

$$\sup_n(-a_n) = -\inf_n a_n \qquad \inf_n(-a_n) = -\sup_n a_n$$

(proof)
定義の不等号の向きを考えれば、ほぼ明らか。詳細略。 $\boxed{\text{証明終}}$

定理 A.4 上に有界な単調増加数列 $\{a_n\}$ は収束し $\lim_{n\to\infty} a_n = \sup_n a_n$

(proof)
まず、上に有界ならば、$\sup_n a_n$ が存在する (順序完備性)。

上限の定義よりすべての n について $a_n \leq \sup_n a_n$ である。また、任意の正の実数 ε について、当然 $\sup_n a_n - \varepsilon < \sup_n a_n$ なので $\sup_n a_n - \varepsilon < a_m(\varepsilon)$ となる項 $a_m(\varepsilon)$ が存在する。このとき、数列 $\{a_n\}$ は単調増加なので、$n \geq m(\varepsilon)$ であれば

$$\sup_n a_n - \varepsilon < a_m(\varepsilon) \leq a_n \leq \sup_n a_n < \sup_n a_n + \varepsilon$$

つまり $|a_n - \sup_n a_n| < \varepsilon$ となる。ε は任意だったので

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \sup_n a_n$$

である。 $\boxed{\text{証明終}}$

定理 A.5 下に有界な単調減少数列 $\{a_n\}$ は収束し $\lim_{n\to\infty} a_n = \inf_n a_n$

(proof)
上と同様。 $\boxed{\text{証明終}}$

A.3 数列の上極限・下極限

上に有界な実数列 $\{a_n\}$ に対し、その始めの m 項を除いた数列 $\{a_{m+1}, a_{m+2}, \cdots\}$ の下限を以て新しい数列 $\{b_m\}$ を定義する、すなわち

$$b_m \equiv \inf_{n>m} a_n$$

とする。m が大きくなれば、下限を取る対象の数列は小さくなっていくので、数列 $\{b_m\}$ は単調増加である。また、$\{a_n\}$ は上に有界なので、$\{b_m\}$ も上に有界である。したがって、定理 A.4(単調有界) より、$\{b_m\}$ は収束する。ここで、以下の定義を置く。

定義 A.3 実数列 $\{a_n\}$ に対し、その**下極限**を

$$\underline{\lim}\, a_n \equiv \begin{cases} \lim_{m\to\infty} \inf_{n>m} a_n \quad (= \sup_m \inf_{n>m} a_n) & \{a_n\} \text{ が下に有界であるとき} \\ -\infty & \{a_n\} \text{ が下に有界でないとき} \end{cases}$$

と定義する。上の議論より、下極限は必ず存在する。◂

同様にして、上極限を定義する。

定義 A.4 実数列 $\{a_n\}$ に対し、その**上極限**を

$$\overline{\lim}\, a_n \equiv \begin{cases} \lim\limits_{m\to\infty} \sup\limits_{n>m} a_n \quad (= \inf\limits_{m} \sup\limits_{n>m} a_n) & \{a_n\}\text{ が上に有界であるとき} \\ \infty & \{a_n\}\text{ が上に有界でないとき} \end{cases}$$

と定義する。定理 *A.5* から上極限は必ず存在する。◂

定理 A.6 $\underline{\lim}\, a_n \leq \overline{\lim}\, a_n$

(proof)
定義から明らか。 $\boxed{\text{証明終}}$

定理 A.7 $\underline{\lim}\, a_n = \overline{\lim}\, a_n$ であることと、$\{a_n\}$ が確定する、つまり、収束するか $\pm\infty$ に発散することは同値であり、このとき $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \underline{\lim}\, a_n = \overline{\lim}\, a_n$ である。

(proof)
必要性から。
(i)a_n が上下に有界であるとき。$\underline{\lim}\, a_n = \overline{\lim}\, a_n = a$ とおく。上限・下限の定義より $n > m$ なら

$$\inf_{n>m} a_n \leq a_n \leq \sup_{n>m} a_n$$

である。$m \to \infty$ の極限をとれば $n \to \infty$ であり、挟撃により

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a$$

となる。
(ii)a_n が上に有界でなく、下に有界なとき。まず、$\overline{\lim}\, a_n = \infty = \underline{\lim}\, a_n$ である。下限の定義より $n > m$ なら $\inf\limits_{n>m} a_n \leq a_n$ である。したがって、このとき $m \to \infty$ の極限をとれば $n \to \infty$ でもあり

$$\infty = \overline{\lim}\, a_n \leq \lim_{n\to\infty} a_n$$

つまり

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$$

となる。
(iii)a_n が下に有界でなく、上に有界なとき。まず、$\underline{\lim}\, a_n = -\infty = \underline{\lim}\, a_n$ である。上限の定義より $n > m$ なら $a_n \leq \sup\limits_{n>m} a_n$ である。したがって、このとき $m \to \infty$ の極限をとれば $n \to \infty$ でもあり

$$\lim_{n\to\infty} a_n \leq \overline{\lim}\, a_n = -\infty$$

つまり

$$\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$$

となる。
(iiii) 上下いずれにも有界でなければ、上極限・下極限は一致しないので、その場合は考察の必要がない。

次は、十分性について。
(i) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ と収束するとき。任意の正の実数 ε に対して、$n \geq n_0(\varepsilon)$ のとき

$$a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon$$

となる。したがって、$m > n_0(\varepsilon)$ のとき

$$a - \varepsilon \leq \sup_{n>m} a_n \leq \inf_{n>m} a_n \leq a + \varepsilon$$

である。[27]これは

$$\lim_{m\to\infty}\sup_{n>m} a_n = \lim_{m\to\infty}\inf_{n>m} a_n = a$$

をあらわしている。つまり

$$\underline{\lim}\, a_n = \overline{\lim}\, a_n = a$$

である。

(ii) $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ と発散するとき。まず、上に有界ではないので、上極限の定義より

$$\overline{\lim}\, a_n = \infty$$

である。また、n を十分大きくとれば $a_n = \infty$ (どの実数よりも大きくできる) なので m が同じくらい十分大きければ $\inf_{n>m} a_n = \infty$ である。したがって

$$\underline{\lim}\, a_n = \lim_{m\to\infty}\inf_{n>m} a_n = \infty = \overline{\lim}\, a_n$$

である。

(iii) $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$ と発散するとき。まず、下に有界ではないので、上極限の定義より

$$\underline{\lim}\, a_n = -\infty$$

である。また、n を十分大きくとれば $a_n = -\infty$ (どの実数よりも小さくできる) なので m が同じくらい十分大きければ $\sup_{n>m} a_n = -\infty$ である。したがって

$$\overline{\lim}\, a_n = \lim_{m\to\infty}\inf_{n>m} a_n = -\infty = \underline{\lim}\, a_n$$

である。 証明終

定理 A.8 任意の n で $a_n \leq b_n$ なら $\overline{\lim}\, a_n \leq \overline{\lim}\, b_n \quad \underline{\lim}\, a_n \leq \underline{\lim}\, b_n$

(proof)

定理 A.2 より

$$\sup_{n>m} a_n \leq \sup_{n>m} b_n \qquad \inf_{n>m} a_n \leq \inf_{n>m} b_n$$

したがって、$m \to \infty$ とすれば

$$\overline{\lim}\, a_n \leq \overline{\lim}\, b_n \quad \underline{\lim}\, a_n \leq \underline{\lim}\, b_n$$

となる。 証明終

定理 A.9

$$\underline{\lim}(-a_n) = -\overline{\lim}\, a_n \qquad \overline{\lim}(-a_n) = -\underline{\lim}\, a_n$$

(proof)

定理 A.3 から考えれば容易。詳細略。 証明終

[27] 上限・下限は数列に属する値とは限らないので等号が付加されているが、本質的ではない。

B　位相・距離空間

測度を論じるには、位相空間の知識もある程度必要になってくるので、ここに付記するが、詳しく書けば一冊の本にもなりえる内容なので、ここでは詳述しない。より詳しいことを知りたければ、「位相への 30 講 志賀浩二 朝倉書店」「数学の基礎 集合・数・位相 齋藤正彦著 基礎数学 14 東京大学出版会」などを参照せよ。

B.1　位相空間と開集合・閉集合

定義 B.1 集合 X に、以下の性質を持つ部分集合族 $\mathfrak{O}$(**開集合族**) が与えられたとき、$(X,\mathfrak{O})$ を**位相空間**といい、$\mathfrak{O}$ に属す集合を**開集合**という。

1. $O_\gamma \in \mathfrak{O}(\gamma\in\Gamma)$ のとき　$\displaystyle\bigcup_{\gamma\in\Gamma} O_\gamma \in \mathfrak{O}$ [28]

2. $O_1, O_2 \in \mathfrak{O}(\gamma\in\Gamma)$ のとき　$O_1\cap O_2 \in \mathfrak{O}$ [29]

3. $X,\phi \in \mathfrak{O}$

◂

定義 B.2 位相空間 $(X,\mathfrak{O})$ において、X の部分集合 F について $F^c\in\mathfrak{O}$ であるとき、F を**閉集合**という。◂

定理 B.1 位相空間 $(X,\mathfrak{O})$ において、閉集合について以下が成り立つ。

1. $\gamma\in\Gamma$ なる F_γ がすべて閉集合のとき　$\displaystyle\bigcap_{\gamma\in\Gamma} O_\gamma$ も閉集合である。

2. F_1, F_2 が閉集合のとき　$O_1\cup O_2$ も閉集合である。

3. X,ϕ は閉集合である。

(proof)
閉集合の補集合が開集合であることから、開集合の定義に適用すればよい。詳細略。 証明終

B.1.1　位相空間の直積

定理 B.2 位相空間 $(X,\mathfrak{O}_X)$,$(Y,\mathfrak{O}_Y)$ について

$$\mathfrak{O}_X\times\mathfrak{O}_Y \equiv \{A\times B | A\in O_X, B\in O_Y\}$$

と定義すると、$\mathfrak{O}_X\times\mathfrak{O}_Y$ は開集合族の条件を満たし、$(X\times Y,\mathfrak{O}_X\times\mathfrak{O}_Y)$ は位相空間となる。

(proof)
証明略。 証明終

定義 B.3 位相空間 $(X,\mathfrak{O}_X)$,$(Y,\mathfrak{O}_Y)$ について、上の定理より位相空間となる $(X\times Y,\mathfrak{O}_X\times\mathfrak{O}_Y)$ を、**積位相空間**または単純に直積と言う。◂

[28]「開集合の和集合は開集合になる」ことを要請している。
[29]「二つの開集合の共通部分は開集合になる」ことを要請している。

B.2　コンパクト

定義 B.4 位相空間 $(X, \mathfrak{O})$ と X の部分集合 Y において、開集合の族 $\{O_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ が

$$Y \subset \bigcup_{\gamma\in\Gamma} O_\gamma$$

をみたすとき、$\{O_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ を Y の**開被覆**であるという。[30]特に、有限個の開集合の族 $\{O_n\}$ によって

$$Y \subset \bigcup_{n=1}^{N} O_n$$

と表されるとき、$\{O_n\}$ は**有限開被覆**であるという。◂

定義 B.5 位相空間 $(X, \mathfrak{O})$ と X の部分集合 Y において、$\{O_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ が Y の開被覆ならば、つまり

$$Y \subset \bigcup_{\gamma\in\Gamma} O_\gamma$$

ならば、$\{O_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ からとった有限個の部分集合族 $O_1, O_2, \cdots, O_s$ が既に Y の有限開被覆である、つまり

$$Y \subset \bigcup_{n=1}^{s} O_n$$

であるとき、Y は**コンパクト**であるという。◂

定理 B.3 コンパクトな位相空間の部分閉集合はコンパクトである。

(proof)

X をコンパクトな位相空間とし、その部分閉集合を F とおく。$\{O_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ を F の開被覆とする。

$$X = F \cup F^c \subset \bigcup_{\gamma\in\Gamma} O_\gamma \cup F^c$$

であり F^c は開集合なので、$\{O_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma} \cup F^c$ は X の開被覆である。X はコンパクトなので、この中から X の有限部分開被覆 $\{O_1, \cdots, O_s, F^c\}$ をとれる。このとき

$$X \subset \bigcup_{n=1}^{s} O_s \cup F^c$$

となる。これより、X の要素で $\bigcup_{n=1}^{s} O_s$ に含まれない要素は F^c に含まれるということがいえる。この対偶をとれば、F の要素は $\bigcup_{n=1}^{s} O_s$ に含まれるということになり、

$$F \subset \bigcup_{n=1}^{s} O_s$$

であるから、F は開被覆の有限部分開被覆によって覆われることになる。つまり、F はコンパクトである。

証明終

定理 B.4 位相空間 $(X, \mathfrak{O}_X)$,$(Y, \mathfrak{O}_Y)$ がコンパクトである時、積位相空間 $(X \times Y, \mathfrak{O}_X \times \mathfrak{O}_Y)$ もコンパクトである。

[30] 包含関係ではなく"="で定義する流儀もあるが、こちらの方が使いやすい。

(proof)

$X \times Y$ の開被覆 $\{O_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ が与えられた時、そのうちの有限個によって

$$X \times Y \subset \bigcup_{n=1}^{N} O_n$$

となればよいのだが、そのままでは扱いにくいので[31]、開被覆の部分開集合も含めることにより

$$\{O'_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma'} = \{O' \in \mathfrak{O}_X \times \mathfrak{O}_Y | O' \subset O_\gamma(\gamma\in\Gamma)\}$$

と拡張した集合族 $\{O'_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma'}$ を考える。これは、明らかにもとの開被覆 $\{O_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ を含むので、$\{O'_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma'}$ も $X \times Y$ の開被覆である。すなわち

$$X \times Y \subset \bigcup_{\gamma\in\Gamma'} O'_\gamma$$

となる。このとき $O'_\gamma = O'^X_\gamma \times O'^Y_\gamma (O'^X_\gamma \in X, O'^Y_\gamma \in Y)$ と表すことにすると、積位相空間の開集合族 $\mathfrak{O}_X \times \mathfrak{O}_Y$ の定義より O'^X_γ,O'^Y_γ はそれぞれ X, Y の開集合であり

$$X \subset \bigcup_{\gamma\in\Gamma'} O'^X_\gamma \quad Y \subset \bigcup_{\gamma\in\Gamma'} O'^Y_\gamma$$

となる[32]。このとき Y は開被覆 $\{O'^Y_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma'}$ によって覆われているので、Y がコンパクトであることより、その中から Y の有限部分開被覆 $\{O'^Y_1, \cdots, O'^Y_s\}$ をとれる。

さて、有限開被覆の各開集合に対し、$O'_\gamma = O'^X_\gamma \times O'^Y_\gamma$ の関係から得られる O'^X_n 全体の成す集合

$$\mathbb{X} \equiv \{A | A \times O'^Y_n(n = 1, \cdots, s) = O'_\gamma(\gamma \in \Gamma')\}$$

を考える。ここで「Y の有限部分開被覆 $\{O'^Y_1, \cdots, O'^Y_s\}$ をどのようにとっても、$\mathbb{X}$ に属するどの集合にも含まれない X の元 x_0 がある」と仮定する。とはいえ、$\{O'_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma'} = \{O'^X_\gamma \times O'^Y_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma'}$ は $X \times Y$ の開被覆なので、$x_0 \in O'^X_{\gamma 0}(\gamma_0 \in \Gamma')$ となる X の開集合 $O'^X_{\gamma 0}$ が存在する。このとき、対応する $O'^Y_{\gamma 0}$ を Y の有限部分開被覆に加えれば、加えられた Y の有限部分開被覆 $\{O'^Y_1, \cdots, O'^Y_s, O'^Y_{\gamma 0}\}$ に対する $\mathbb{X}$ については、$x_0 \in O'^X_{\gamma 0} \in \mathbb{X}$ となり、仮定に矛盾する。したがって、Y の有限部分開被覆 $\{O'^Y_1, \cdots, O'^Y_s\}$ をうまくとれば、X の任意の元は $\mathbb{X}$ に属する集合のどれかには含まれる。つまり

$$X \subset \bigcup_{A\in\mathbb{X}} A$$

となるということであり、$\mathbb{X}$ は X の開被覆である。

X はコンパクトなので、$\mathbb{X}$ の有限部分被覆 $\{O'^X_1, \cdots, O'^X_t\}$ によって

$$X \subset \bigcup_{n=1}^{t} O'^X_n$$

と覆われる。また、$\{O'^Y_1, \cdots, O'^Y_s\}$ は Y の有限開被覆であったので

$$Y \subset \bigcup_{m=1}^{s} O'^Y_m$$

と覆われる。以上より

$$X \times Y \subset \bigcup_{n=1}^{t} O'^X_n \times \bigcup_{m=1}^{s} O'^Y_m = \bigcup_{n=1}^{t}\bigcup_{m=1}^{s} (O'^X_n \times O'^Y_m)$$

[31] Y の有限開被覆が得られても、$\{O_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ で対応する X の集合族が被覆になるとは限らない。
[32] 逆は成立しないのが、直積を扱う上での注意である。これは平面を考えればよくわかる。

である。$\mathbb{X}$ の定義より

$$O'^X_n \times O'^Y_m (n=1,\cdots,t \quad m=1,\cdots,s) \quad = \quad O'_\gamma (\gamma \in \Gamma') \quad \subset \quad O_\gamma (\gamma \in \Gamma)$$

である。このとき、上の包含関係で $O'^X_n \times O'^Y_m$ に対応する O_γ を O_{nm} と表すことにすれば、$O'^X_n \times O'^Y_m \subset O_{nm}$ なので

$$X \times Y \subset \bigcup_{n=1}^{t} \bigcup_{m=1}^{s} (O'^X_n \times O'^Y_m) \subset \bigcup_{n=1}^{t} \bigcup_{m=1}^{s} O_{nm}$$

である。よって、もとの開被覆 $\{O_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$ の有限部分開被覆 $\{O_{11}, O_{12}, \cdots, O_{1s}, \cdots, O_{t1}, \cdots, O_{ts}\}$ によって $X \times Y$ は覆われたので、積位相空間 $(X \times Y, \mathfrak{O}_X \times \mathfrak{O}_Y)$ はコンパクトである。 証明終

B.3 距離空間

定義 B.6 集合 X に

$$\text{関数 } d : X \times X \to \boldsymbol{R}$$

が与えられ、任意の $x, y, z \in X$ について以下の性質を満たすとき、(X, d) を**距離空間**といい、d を**距離関数**、$d(x, y)$ を x, y の距離という。

1. $d(x, y) \geq 0 \quad d(x, y) = 0$ なら $x = y$
2. $d(x, y) = d(y, x)$
3. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ 　三角不等式

◂

定義 B.7 距離空間 (X, d) と $x \in X$ について、$V_\epsilon(x) \equiv \{p | d(x, p) < \epsilon\}$ と定義し、これを x の ϵ **近傍**もしくは**開球**という。◂

定義 B.8 距離空間 (X, d) と $x \in X$ について、$\overline{V}_\epsilon(x) \equiv \{p | d(x, p) \leq \epsilon\}$ と定義し、これを x の**閉球**という。◂

補題 B.5 距離空間 (X, d) と、その部分空間 Y について、$y \in Y, x \in Y^c$ ならば $d(x, y) > 0$ となる。

(proof)
$d(x, y) = 0$ ならば距離空間の定義から $x = y$ となり、$x = y \in Y$ となって矛盾する。 証明終

B.3.1 距離空間における収束

距離空間においては、距離関数による実数との対応づけによって、収束の概念を定義できる。

定義 B.9 距離空間 (X, d) において、X の点列[33] $\{x_n\}$ が

$$\lim_{n \to \infty} d(x_n, a) = 0$$

をみたすとき、点列 $\{x_n\}$ は a に収束するといい

$$\lim_{n \to \infty} x_n = a$$

といったように、数列の収束に準じて表す。◂

[33] 点とは、一般に集合の元のことを表しており、点列とは、単に要素の列のことである。

数列の極限と同様に、点列の要素がすべてある集合に含まれていても、その点列の極限がその集合に含まれているとは限らない。また、三角不等式によって極限の一意性が保証される。（次の定理を参照）

定理 B.6 距離空間 (X, d) において、X の点列 $\{x_n\}$ が、$n \to \infty$ のとき $x_n \to a$,$x_n \to b$ ならば $a = b$ である。

(proof)
$d(a, b) > 0$ と仮定する。三角不等式から $d(a, b) \leq d(a, x_n) + d(b, x_n)$ であるが、$n \to \infty$ のとき右辺は 0 に収束するので、$d(a, x_n) + d(b, x_n) < d(a, b)$ とすることができ、矛盾する。したがって、$d(a, b) = 0$ であり、距離空間の定義から $a = b$ となる。 証明終

補題 B.7 距離空間 (X, d) において、X の点列 $\{x_n\}$ が x に収束することと、任意の $\varepsilon > 0$ に対し、十分大きな n をとれば $x_n \in V_\varepsilon(x)$ となることは同値である。

(proof)
簡単な言い換え、証明略。 証明終

定義 B.10 距離空間 (X, d) と X の点列 $\{x_n\}$ について、任意の $\varepsilon > 0$ に対してある自然数 L が存在して

$$\forall n, m \geq L \quad \to \quad d(x_n, x_m) < \epsilon$$

となるとき、点列 $\{x_n\}$ を**コーシー列**という。また、X の任意のコーシー列が収束することを**コーシー完備**であるといい、このとき、X を**完備距離空間**[34] であるという。 ◂

定理 B.8 コーシー列が収束部分列を持てば、部分列と同じ極限に収束する。

(proof)
コーシー列を $\{x_n\}$ とする。収束部分列を持つので、極限 a が存在して

$$\lim_{n \to \infty} d(x_{\varphi(n)}, a) = 0$$

である。一方、コーシー列であることより

$$\lim_{n \to \infty} d(x_{\varphi(n)}, x_n) = 0$$

であり、三角不等式から

$$\lim_{n \to \infty} d(x_n, a) \leq \lim_{n \to \infty} \{d(x_n, x_{\varphi(n)}) + d(x_{\varphi(n)}, a) = 0$$

となる。 証明終

B.3.2 距離空間の開集合・閉集合

定義 B.11 距離空間 (X, d) において、X の部分集合 O が $\forall x \in O$ について、各 x に対し適当な $\epsilon > 0$ をとると $V_\epsilon(x) \subset O$ となるとき、O を**距離空間の意味で開集合**であるという。また、X, ϕ は距離空間の意味の開集合であると定義する。 ◂

定義 B.12 距離空間 (X, d) において、X の部分集合 F について、F^c が距離空間の意味で開集合であるとき、F は**閉集合**であるという。 ◂

[34]全順序集合には順序完備の概念があるが、これとコーシー完備は同値ではない。実数 (順序体) は距離空間であり、かつ、全順序集合であるが、その完備性とは、通常、順序完備のほうを指しており、コーシー完備かつアルキメデス的であることと同値である。

定理 B.9 $\gamma \in \Gamma$ なる O_γ がすべて距離空間の意味で開集合であるとき $\displaystyle\bigcup_{\gamma\in\Gamma} O_\gamma$ も距離空間の意味で開集合である。

(proof)
$\forall x \in \displaystyle\bigcup_{\gamma\in\Gamma} O_\gamma$ について、$c \in \Gamma$ のどれかを選べば $x \in O_c$ である。したがって、適当な $\epsilon > 0$ をとれば $V_\epsilon(x) \subset O_c \subset \displaystyle\bigcup_{\gamma\in\Gamma} O_\gamma$ よって、$\displaystyle\bigcup_{\gamma\in\Gamma} O_\gamma$ は距離空間の意味で開集合である。 証明終

定理 B.10 O_1, O_2 が距離空間の意味で開集合のとき $O_1 \cup O_2$ も距離空間の意味で開集合である。

(proof)
$O_1 \cap O_2 = \phi$ のときは、定義よりこれは距離空間の意味で開集合である。$O_1 \cap O_2 \neq \phi$ のとき、$\forall x \in O_1 \cap O_2$ について $x \in O_1$かつ $x \in O_2$ である、O_1, O_2 が距離空間の意味で開集合なので、適当な $\epsilon > 0$ をとれば $V_\epsilon(x) \subset O_1$かつ $V_\epsilon(x) \subset O_2$ よって $V_\epsilon(x) \subset O_1 \cap O_2$ となり、$O_1 \cap O_2$ は開集合である。 証明終

以上の定理と、距離空間の意味での開集合の定義より、次のことが言える。

定理 B.11 距離空間 (X, d) において、距離空間の意味での開集合からなる集合族 $\mathfrak{O}$ をとると、$(X, \mathfrak{O})$ は位相空間になり、距離空間の意味の開集合は位相空間の意味でも開集合となる。

したがって、通常、距離空間においては、距離空間の開集合・閉集合のことを「距離空間の」という序詞を付けずに呼んでも問題ないわけである。
次の定理は、距離空間の閉集合の、最も本質的な性質である。

定理 B.12 距離空間 (X, d) において、X の部分集合 F が閉集合であるとき、F の点列 $\{x_n\}$ が x に収束するなら、$x \in F$ である。

(proof)
$x \notin F$ と仮定すると、$x \in F^c$ であるが、F^c は開集合なので適当な正数 ϵ を選べば

$$V_\epsilon(x) \subset F^c$$

となる。点列 $\{x_n\}$ は x に収束しているので、補題 B.7 より十分大きな n に対して

$$x_n \in V_\epsilon(x) \subset F^c$$

となることになるが、これは $\{x_n\}$ が F の点列であることに矛盾する。したがって $x \in F$ である。 証明終

加算個の集合族に対する選択公理を用いれば、逆も成り立つ。

定理 B.13 距離空間 (X, d) において、X の部分集合 F について、F の任意の収束列 $\{x_n\}$ の極限が F に含まれるならば、F は閉集合である。

(proof)
F が閉集合で無いとすると、F^c は開集合でない。従って、ある $\boldsymbol{b} \in F^c$ が存在して、任意の $\epsilon > 0$ に対して $V_\epsilon(\boldsymbol{b}) \not\subset F^c$ すなわち $V_\epsilon(\boldsymbol{b}) \cap F \neq \emptyset$ である。n を自然数とし、$V_{\frac{1}{n}}(\boldsymbol{b}) \cap F$ から選択公理により一要素を選び $\boldsymbol{x}_n$ とすると、点列 $\{\boldsymbol{x}_n\}$ は F 上の点列で、$\boldsymbol{b} \in F^c$ に収束する。つまり、F が閉集合で無いならば、F の収束列で極限が F に含まれないものが存在する。この対偶をとれば示される。 証明終

補題 B.14 開球は開集合である。

(proof)
開球を $V_r(a)$ とする。$\forall b \in V_r(a)$ について、$d(a,b) < r$ である。ここで、$r - d(a,b) > 0$ なので、$V_{r-d(a,b)}(b)$ という b の $r - d(a,b)$ 近傍 を考えることができる。$\forall x \in V_{r-d(a,b)}(b)$ について

$$
\begin{aligned}
d(b,x) &< r - d(a,b) \\
d(b,x) + d(a,b) &< r \\
d(a,x) &< r \quad \because \text{三角不等式}
\end{aligned}
$$

であるから、$x \in V_r(a)$ である。つまり、任意の $b \in V_r(a)$ に対し、正数 $r - d(a,b)$ をとることで $V_{r-d(a,b)}(b) \subset V_r(a)$ となるので、開球 $V_r(a)$ は開集合である。 証明終

補題 B.15 閉球は閉集合である。

(proof)
閉球を $\overline{V}_r(a)$ とする。$\forall b \in \overline{V}_r(a)^c$ について、$d(a,b) \geq r$ である。ここで、$d(a,b) - r > 0$ なので、$V_{d(a,b)-r}(b)$ という b の $d(a,b) - r$ 近傍 を考えることができる。$\forall x \in V_{d(a,b)-r}(b)$ について

$$
\begin{aligned}
d(b,x) &< d(a,b) - r \\
r + d(b,x) &< d(a,b) \\
r + d(b,x) &< d(a,x) + d(b,x) \quad \because \text{三角不等式} \\
r &< d(a,x)
\end{aligned}
$$

であるから、$x \in \overline{V}_r(a)^c$ である。つまり、任意の $b \in \overline{V}_r(a)^c$ に対し、正数 $d(a,b) - r$ をとることで $V_{d(a,b)-r} \subset \overline{V}_r(a)^c$ となるので、$\overline{V}_r(a)^c$ は開集合である。よって、閉球 $\overline{V}_r(a)$ は閉集合である。 証明終

B.4 近傍

定義 B.13 X を位相空間、$a \in X$ とする。このとき、X の部分集合 A について

$$a \in B \subset A$$

となる開集合 B が存在するとき、A は点 a の**近傍**であるという。◂

定理 B.16 位相空間 X とその部分集合 A について、A が開集合であることと、A の任意の点について $N \subset A$ なる近傍 N が存在することは、同値である。

(proof)
A が開集合であれば、A の任意の点について $N = A$ が $N \subset A$ なる近傍である。逆に、A の任意の点について $N \subset A$ なる近傍 N が存在するとき。そのような、$a \in A$ の近傍を $N(a)$ とすると、$\forall a \in A$ について、近傍の定義より

$$a \in O(a), O(a) \subset N(a)$$

なる開集合 $O(a)$ が存在する。これについて $a \in O(a) \subset \bigcup_{a' \in A} O(a')$ であるから、つまり

$$A \subset \bigcup_{a' \in A} O(a')$$

である。また、$O(a) \subset N(a) \subset A$ であるから

$$\bigcup_{a' \in A} O(a') \subset A$$

である。よって

$$A = \bigcup_{a' \in A} O(a')$$

となる。$O(a')$ はそれぞれ開集合なので、その和集合である A も開集合である。 証明終

補題 B.17 距離空間では、そのある点 x について、ϵ 近傍 $V_\epsilon(x)$ は、x の近傍である。また、任意の x の近傍 N について

$$\exists \epsilon > 0, V_\epsilon(x) \subset N$$

となる。

(proof)
容易。詳細略。 証明終

B.5 連続写像

定義 B.14 X, Y を位相空間、f を $f : X \to Y$ なる写像、a を X の点とする。$f(a) \in Y$ の任意の近傍 N_Y に対して

$$f(N_X) \subset N_Y$$

となる $a \in X$ の近傍 N_X が存在するとき、f は**点 a で連続**であるという。また、$\forall x \in X$ について f が点 x で連続であるならば、f は**連続**であるという。◀

位相空間での近傍には、全空間も含まれており、近いという感覚はあまりない。連続の定義では、任意の近傍を対象とすることによって、一般の位相空間では表現しづらい「近づく」ということを表現している。

定理 B.18 $(X, d_X), (Y, d_Y)$ を距離空間、f を $f : X \to Y$ なる写像、a を X の点とする。このとき

$$f \text{ が } a \text{ で連続} \quad \leftrightarrow \quad \forall \epsilon, \exists \delta \qquad f(V_\delta(a)) \subset V_\epsilon(f(a))$$

である。

(proof)
f が a で連続であるとき。$f(a)$ の任意の近傍 N_Y に対して $f(N_X) \subset N_Y$ となる a の近傍 N_X が存在する。よって、補題 B.17 より、任意の $\forall \epsilon > 0$ について

$$f(N_X) \subset V_\epsilon(f(a))$$

となる a の近傍 N_X が存在する。このとき、補題 B.17 よりある δ が存在して

$$V_\delta(a) \subset N_X$$

である。よって、任意の ϵ について

$$f(V_\delta(a)) \subset f(N_X) \subset V_\epsilon(f(a))$$

である。

逆に $\forall \epsilon, \exists \delta, f(V_\delta(a)) \subset V_\epsilon(f(a))$ であるとき。任意の $f(a)$ の近傍 N_Y について、補題 B.17 より、ある $\phi > 0$ が存在して $V_\phi(f(a)) \subset N_Y$ となる。よって、条件よりある δ が存在して

$$f(V_\delta(a)) \subset V_\phi(f(a)) \subset N_Y$$

であり、補題 B.17 から $V_\delta(a)$ は a の近傍である。よって示された。 証明終

定理 B.19 $(X,d_X),(Y,d_Y)$ を距離空間、f を $f:X\to Y$ なる写像、a を X の点とする。このとき

$$f \text{ が } a \text{ で連続} \quad \leftrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} x_n = a \text{ なる任意の点列 } \{x_n\} \text{ について } \lim_{x\to\infty} f(x_n) = f(a)$$

である。

(proof)
f が a で連続であるとき。定理 B.18 より

$$\forall\epsilon,\exists\delta \qquad f(V_\delta(a)) \subset V_\epsilon(f(a))$$

である。これを言い換えると

$$\forall d(a,x) < \delta \text{ならば } d(f(a),f(x)) < \epsilon$$

である。$\lim_{n\to\infty} x_n = a$ なので、n を十分大きくとれば $d(a,x) < \delta$ とできる。よってこのとき任意の ϵ について $d(f(a),f(x)) < \epsilon$ となるのだから

$$\lim_{x\to\infty} f(x_n) = f(a)$$

である。

逆に、$\lim_{n\to\infty} x_n = a$ なる任意の点列 $\{x_n\}$ について $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(a)$ であるとき。f が a で連続でないとすると、定理 B.18 より

$$\forall\delta,\exists\epsilon \quad f(V_\delta(a)) \not\subset V_\epsilon(f(a))$$

である。つまり、任意の δ に対して、ある ϵ が存在して $b\in V_\delta(a)$ かつ $f(b)\notin V_\epsilon(f(a))$ となる $b\in X$ が存在する。よって、$b_n \in V_{\frac{1}{n}}(a)$ かつ $f(b_n)\notin V_\epsilon(f(a))$ であるような点列 $\{b_n\}$ が存在する。これについては $d(b_n,a) < \frac{1}{n}$ であるから、

$$\lim_{n\to\infty} b_n = a$$

よって、条件より

$$\lim_{n\to\infty} f(b_n) = f(a)$$

である。つまり、n を十分大きくとれば

$$d(f(b_n),f(a)) < \epsilon$$

となるということだが、これは $f(b_n)\notin V_\epsilon(f(a))$ に矛盾する。よって f が a で連続である。 証明終

定理 B.20 距離関数は連続である。

(proof)
距離空間を (X,d) とする。$\forall a,b\in X$ について、任意の $x_n\to a, y_n\to b$ なる点列 $\{x_n\}\{y_n\}$ を考えたとき、三角不等式より

$$\begin{aligned}
d(x_n,y_n) &\le d(x_n,a)+d(a,y_n)\\
&\le d(x_n,a)+d(y_n,b)+d(a,b)\\
d(x_n,y_n)-d(a,b) &\le d(x_n,a)+d(y_n,b)
\end{aligned}$$

であり、また

$$\begin{aligned}
d(a,b) &\le d(x_n,a)+d(b,x_n)\\
&\le d(x_n,a)+d(y_n,b)+d(x_n,y_n)\\
-(d(x_n,y_n)-d(a,b)) &\le d(x_n,a)+d(y_n,b)
\end{aligned}$$

であるから

$$|d(x_n, y_n) - d(a,b)| \leq d(x_n, a) + d(y_n, b)$$

である。したがって、条件より $n \to \infty$ とすると $d(x_n, a) \to 0, d(y_n, b) \to 0$ であるから

$$\lim_{n \to \infty} d(x_n, y_n) = d(a,b)$$

となる。$a, b \in X$ は任意だったので、定理 B.19 より距離関数 d は連続である。 $\boxed{\text{証明終}}$

定理 B.21 写像 $f : X \to Y$ が連続であることと、任意の Y の開集合 O について $f^{-1}(O)$ が X の開集合であることは、同値である。

(proof)

写像 $f : X \to Y$ が連続であるとき。O を Y の任意の開集合とする。$f^{-1}(O)$ が空集合ならば、これは確かに開集合である。$f^{-1}(O) \neq \phi$ であるとき。$\forall x \in f^{-1}(O)$ について、$f(x) \in O$ であり、O は $f(x)$ の近傍であるから、f の連続性より

$$f(N_x) \subset O \to N_x \subset f^{-1}(O)$$

となる x の近傍 N_x が存在する。よって、定理 B.16 より $f^{-1}(O)$ は開集合である。

逆に、任意の Y の開集合 O について $f^{-1}(O)$ が X の開集合であるとき。$\forall x \in X$ について、$f(x)$ の任意の近傍 N_Y を考えると、近傍の定義より $f(x) \in O \subset N_Y$ なる開集合 O が存在する。このとき、$x \in f^{-1}(O)$ であり、条件から $f^{-1}(O)$ は開集合なので $f^{-1}(O)$ は x の近傍である。また、$O \subset N_Y$ より

$$f^{-1}(O) \subset f^{-1}(N_Y)$$

であるから、$f(x)$ の任意の近傍 N_Y に対して、上記の関係を満たす x の近傍 $f^{-1}(O)$ が存在するということであり、任意の $x \in X$ について f は x で連続である。つまり、f は連続である。 $\boxed{\text{証明終}}$

B.5.1 連続写像で保たれる性質

定理 B.22 連続写像 $f : X \to Y$ について、X がコンパクトならば $f(X)$ もコンパクトである。

(proof)

$\{O_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$ を $f(X)$ の開被覆とする。定理 B.21 より、$f^{-1}(O_\gamma)$ は開集合である。また、$\forall x \in X$ について

$$x \in f(X) \subset \bigcup_{\gamma \in \Gamma} O_\gamma$$

であるから

$$\exists \gamma' \in \Gamma \quad f(x) \subset O'_\gamma \leftrightarrow x \in f^{-1}(O'_\gamma)$$

である。$\therefore x \in f^{-1}(O'_\gamma) \subset \bigcup_{\gamma \in \Gamma} f^{-1}(O_\gamma)$ つまり

$$X \subset \bigcup_{\gamma \in \Gamma} f^{-1}(O_\gamma)$$

であり、$\{f^{-1}(O_\gamma)\}_{\gamma\in\Gamma}$ は X の開被覆である。X がコンパクトなので、このうちの有限個の $\{f^{-1}(O_1),\cdots,f^{-1}(O_m)\}$ によって

$$\begin{aligned} X &\subset \bigcup_{n=1}^{m} f^{-1}(O_n) \\ &= f^{-1}\left(\bigcup_{n=1}^{m} O_n\right) \quad \because m<\infty \end{aligned}$$

と覆われる。このとき

$$f(X) \subset f\left(f^{-1}\left(\bigcup_{n=1}^{m} O_n\right)\right) \subset \bigcup_{n=1}^{m} O_n \quad \because f(f^{-1}(A)) \subset A$$

であるから、もとの開被覆から選んだ $\{O_n\}$ は $f(X)$ の有限被覆である。よって、$f(X)$ はコンパクトである。 $\boxed{\text{証明終}}$

C　線形空間・線形写像

C.1　共通部分・和空間・合併集合

複数の線形部分空間 $W_1, W_2, \cdots, W_s$ が与えられた時に、その共通部分 $W_1 \cap W_2 \cap \cdots \cap W_s$ 及び合併集合 (和集合)$W_1 \cup W_2 \cup \cdots \cup W_s$ について考える。まずは共通部分から。

定理 C.1 線形部分空間 $W_1, W_2, \cdots, W_s$ について、共通部分 $W_1 \cap W_2 \cap \cdots \cap W_s$ は線形部分空間である。

(proof)
$\boldsymbol{x} \in W_1 \cap W_2 \cap \cdots \cap W_s$ は

$$\boldsymbol{x} \in W_1 \text{かつ } \boldsymbol{x} \in W_2 \text{かつ} \cdots \text{かつ } \boldsymbol{x} \in W_s$$

と同値である。よって任意の $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in W_1 \cap W_2 \cap \cdots \cap W_s$ について

$$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in W_1 \text{かつ } \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in W_2 \text{かつ} \cdots \text{かつ } \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in W_s$$

したがって

$$\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} \in W_1 \text{かつ } \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} \in W_2 \text{かつ} \cdots \text{かつ } \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} \in W_s$$

これは $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} \in W_1 \cap W_2 \cap \cdots \cap W_s$ を意味している。

$cx \in W_1 \cap W_2 \cap \cdots \cap W_s$ についても同様にすればよい。よって示された。 証明終

共通部分は線形部分空間だが、**合併集合 (和集合) は一般には線形部分空間ではない**。なぜなら $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in W_1 \cup W_2 \leftrightarrow \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in W_1 or W_2$ であるが、$\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} \in W_1 or W_2$ は必ずしも成り立たたず、$\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} \in W_1 \cup W_2$ となるといえないからである。

そこで、合併集合 (和集合) のすべての元の線形結合まで含めることを考える。こうすると、その集合は線形部分空間になる。具体的には合併集合では成り立たない $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} \in W_1 \cup W_2$ が成り立つように定義した集合を考えるということである[35]。

定義 C.1 線形部分空間 $W_1, W_2, \cdots, W_s$ について、$W_1 + W_2 + \cdots + W_s = \{\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2 + \cdots + \boldsymbol{x}_n | \boldsymbol{x}_1 \in W_1, \cdots, \boldsymbol{x}_n \in W_s\}$ を**和空間**という。標語的には、各部分空間の元の和として表されるベクトルの全体である。◂

定理 C.2 線形部分空間の和空間は線形部分空間である。

(proof)
容易、証明略。 証明終

C.2　部分空間と次元

定理 C.3 $W_1 \subset W_2$ なら $dim W_1 \leq dim W_2$

[35] イメージとしては、xy 平面を考えればよい。x 軸および y 軸は、xy 平面の線形部分空間である。x 軸と y 軸の和集合は、十字の形をしているが、これは和（平行四辺形を使う例のもの）について閉じておらず、線形空間ではない。そこで、和の部分まで含める別の「和の集合」を考えようということであり、それがここで定義されている和空間である。この場合、x 軸と y 軸の和空間は xy 平面である。

(proof)
W_1 の基底 $< \boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_{dimW_1} >$ をとる。

(i)$< \boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_{dimW_1} >$ の線形結合で W_2 のすべての元をあらわせるとき
$< \boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_{dimW_1} >$ は W_2 の元でもあり、さらに、線形独立で、また W_2 のすべての元をあらわせるので、これは W_2 の基底でもある。従ってこの時 $dimW_1 = dimW_2$ である。

(ii)$< \boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_{dimW_1} >$ の線形結合であらわせない W_2 の元があるとき
$< \boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_{dimW_1} >$ は W_2 の元でもあり、線形独立である。従って、定理**??**より、これに適当なベクトルを付加することで W_2 の基底を作ることができる。このとき、$dimW_1 < dimW_2$ となる。

以上ですべての場合が網羅されるので、あわせて $dimW_1 \leq dimW_2$ である。 証明終

定理 C.4 $W_1 \subset W_2$ で $dimW_1 = dimW_2$ なら $W_1 = W_2$

(proof)
W_1 の基底 $< \boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_{dimW_1} >$ をとる。これは次元個の W_2 の線形独立なベクトルの集合でもある。従って、定理**??**より、これは W_2 の基底でもある。つまり、任意の W_2 の要素が $< \boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_{dimW_1} >$ の線形結合で表せるということであり、これは W_1 の要素である $< \boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_{dimW_1} >$ の線形結合は W_1 の要素なので、任意の W_2 の要素が W_1 の要素でもあるということになる。従って、$W_1 \supset W_2$ であり、仮定の $W_1 \subset W_2$ とあわせて $W_1 = W_2$ となる。 証明終

定理 C.5 $dimW_1 + dimW_2 = dim(W_1 + W_2) + dim(W_1 \cap W_2)$

(proof)
$W_1 \cap W_2 \subset W_1, W_2 \subset W_1 + W_2$ である。定理**??**に基づき、$W_1 \cap W_2$ の基底 $< \boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_r >$ を拡大して W_1 の基底 $< \boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_r, \boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_s >$ と W_2 の基底 $< \boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_r, \boldsymbol{b}_1, \cdots, \boldsymbol{b}_t >$ をつくる。このとき $dim(W_1 + W_2) = r, dimW_1 = r + s, dimW_2 = r + t$ である。

$W_1 + W_2$ の任意の元は W_1 と W_2 の元の和として表せるので、その基底の線形結合を整理することで、$\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_r, \boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_s, \boldsymbol{b}_1, \cdots, \boldsymbol{b}_t$ の線形結合として表せる。これが $W_1 + W_2$ の基底であるには、あとは線形独立であればよい。

線形関係

$$\sum_{i=1}^{r} e_i \boldsymbol{e}_i + \sum_{j=1}^{s} a_j \boldsymbol{a}_j + \sum_{k=1}^{t} b_k \boldsymbol{b}_k = e_i \boldsymbol{e}_i + a_j \boldsymbol{a}_j + b_k \boldsymbol{b}_k = \boldsymbol{0} \tag{48}$$

[36]について考える。移項して

$$e_i \boldsymbol{e}_i + a_j \boldsymbol{a}_j = -b_k \boldsymbol{b}_k$$

左辺の $e_i \boldsymbol{e}_i + a_j \boldsymbol{a}_j$ は W_1 の元を表しており、右辺の $-b_k \boldsymbol{b}_k$ は W_2 の元を表している。よってこの等式が成り立つ時、両辺は $W_1 \cap W_2$ の元でなければならない。$-b_k \boldsymbol{b}_k$ が $W_1 \cap W_2$ の元なので、その基底 $< \boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_r >$ を用いて、

$$\begin{aligned} e'_i \boldsymbol{e}_i &= -b_k \boldsymbol{b}_k \\ e'_i \boldsymbol{e}_i + b_k \boldsymbol{b}_k &= \boldsymbol{0} \end{aligned} \tag{49}$$

[36]アインシュタインの規約

これは W_2 の基底 $< \boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_r, \boldsymbol{b}_1, \cdots, \boldsymbol{b}_t >$ に関する線形関係なので、基底の線形独立性より、自明な解しか持たない。すなわち $e'_i = 0 (i = 1, \cdots, r) \quad b_k = 0 (k = 1, \cdots, t)$ である。これを式 (48) に代入すると、

$$e_i \boldsymbol{e}_i + a_j \boldsymbol{a}_j = \boldsymbol{0}$$

これは W_1 の基底 $< \boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_r, \boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_s >$ に関する線形関係なので、基底の線形独立性より、自明な解しか持たない。すなわち $e_i = 0 (i = 1, \cdots, r) \quad a_k = 0 (k = 1, \cdots, t)$ である。以上より、線形関係 (48) は自明な解しか持たないのであって、$\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_r, \boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_s, \boldsymbol{b}_1, \cdots, \boldsymbol{b}_t$ は線形独立である。よって、これは $W_1 + W_2$ の基底である。従って

$$dim(W_1 + W_2) + dim(W_1 \cap W_2) = r + s + t + r = (r + s) + (r + t) = dimW_1 + dimW_2$$

となる。 $\boxed{\text{証明終}}$

定理 C.6 $dim(W_1 + \cdots + W_s) \leq dimW_1 + \cdots + dimW_s$

(proof)
s=1 のときは明らか。s=k-1 のとき成り立つとして s=k のときを考える。

仮定より $dim(W_1 + \cdots + W_{k-1}) \leq dimW_1 + \cdots + dimW_{k-1}$ ゆえに

$$dim(W_1 + \cdots + W_{k-1}) + W_k \leq dimW_1 + \cdots + dimW_k$$

である。ここで、$W_1 + \cdots + W_k = (W_1 + \cdots + W_{k-1}) + W_k$ なので、定理 C.5 より $dim(W_1 + \cdots + W_k) + dim(\{W_1 + \cdots + W_{k-1}\} \cap W_k) = dim(W_1 + \cdots + W_{k-1}) + W_k$ だが、次元は 0 以上なので

$$dim(W_1 + \cdots + W_k) \leq dim(W_1 + \cdots + W_{k-1}) + W_k$$

である。あわせて

$$dim(W_1 + \cdots + W_k) \leq dim(W_1 + \cdots + W_{k-1}) + W_k \leq dimW_1 + \cdots + dimW_k$$

であり、s=k の時も成り立つ。帰納法により示された。 $\boxed{\text{証明終}}$

C.3 直和

線形空間 V の任意の要素 $\boldsymbol{x}$ が、その線形部分空間 $W_1, \cdots, W_s$ の要素の和 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_1 + \cdots + \boldsymbol{x}_s \quad (\boldsymbol{x}_i \in W_i)$ として表されるとき、つまり、$V = W_1 + \cdots + W_s$ であるとき、一般には、その表し方は複数あるが、一意的に定まる場合もあり、重要である。

定義 C.2 $V = W_1 + \cdots + W_s$ であるとき、V のベクトルの、$W_1, \cdots, W_s$ のベクトルの和としての表し方が一意的であるとき、V は $W_1, \cdots, W_s$ の**直和**であるといい、$\mathbf{V} = \mathbf{W_1} \oplus \cdots \oplus \mathbf{W_s}$ と表す。このときの表し方を直和分解という。◂

表し方の一意性は、ベクトルの線形独立の概念に近く、線形独立の定義に似た、下の定理が成立する。

定理 C.7 $V = W_1 + \cdots + W_s$ であるとき、$V = W_1 \oplus \cdots \oplus W_s$*(*直和*)*であることは、ゼロベクトルを $W_1, \cdots, W_s$ のベクトルの和として $\boldsymbol{0} = \boldsymbol{x}_1 + \cdots + \boldsymbol{x}_s \quad (\boldsymbol{x}_i \in W_i)$ と表すやりかたは $\boldsymbol{x}_1 = \boldsymbol{0}, \cdots, \boldsymbol{x}_s = \boldsymbol{0}$ という自明な表し方しかない、ということと同値である。

(proof)

(i)$V = W_1 \oplus \cdots \oplus W_s$ であるとき。

$\boldsymbol{0} = \boldsymbol{x}_1 + \cdots + \boldsymbol{x}_s \quad (\boldsymbol{x}_i \in W_i)$ のとき、明らかに $\boldsymbol{x}_1 = \boldsymbol{0}, \cdots, \boldsymbol{x}_s = \boldsymbol{0}$ によって表せる。直和であるので表し方は一意的であり、この自明な表し方以外はない。

(ii)$\boldsymbol{0} = \boldsymbol{x}_1 + \cdots + \boldsymbol{x}_s \quad (\boldsymbol{x}_i \in W_i)$ と表すやりかたは $\boldsymbol{x}_1 = \boldsymbol{0}, \cdots, \boldsymbol{x}_s = \boldsymbol{0}$ という自明な表し方しかないとき。

V の任意のベクトル $\boldsymbol{x}$ が

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_1 + \cdots + \boldsymbol{x}_s = \boldsymbol{x}'_1 + \cdots + \boldsymbol{x}'_s \quad (\boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{x}'_i \in W_i)$$

と表されたとする。このとき、

$$(\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}'_1) + \cdots + (\boldsymbol{x}_s - \boldsymbol{x}'_s) = \boldsymbol{0}$$

であるが、仮定より $(\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}'_1) = \boldsymbol{0}, \cdots, (\boldsymbol{x}_s - \boldsymbol{x}'_s) = \boldsymbol{0}$ である。つまり、表し方は一意的であり、V は $W_1, \cdots, W_s$ の直和である。 証明終

補題 C.8 $V = W_1 + \cdots + W_s$ であるとき、$U_j = W_1 + \cdots + W_{j-1} + W_{j+1} + \cdots + W_s$ と表すことにすると、

$$V = W_1 \oplus \cdots \oplus W_s$$

であることと

$$V = W_j \oplus U_j \text{かつ}\ U_j = W_1 \oplus \cdots \oplus W_{j-1} \oplus W_{j+1} \oplus \cdots \oplus W_s$$

であることは同値である。

(proof)

(i)$V = W_1 \oplus \cdots \oplus W_s$ であるとき。

任意の V のベクトル $\boldsymbol{x}$ は、$W_1, \cdots, W_s$ のベクトルの和として

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_1 + \cdots + \boldsymbol{x}_s = \boldsymbol{x}_j + (\boldsymbol{x}_1 + \cdots + \boldsymbol{x}_{j-1} + \boldsymbol{x}_{j+1} + \cdots + \boldsymbol{x}_s) \quad (\boldsymbol{x}_i \in W_i)$$

と一意的に表される。よって $\boldsymbol{x}_j \in W_j, (\boldsymbol{x}_1 + \cdots + \boldsymbol{x}_{j-1} + \boldsymbol{x}_{j+1} + \cdots + \boldsymbol{x}_s) \in U_j$ なので、

$$V = W_j \oplus U_j$$

である。

ここで、

$$\boldsymbol{0} = \boldsymbol{x}_1 + \cdots + \boldsymbol{x}_{j-1} + \boldsymbol{x}_{j+1} + \cdots + \boldsymbol{x}_s \quad (\boldsymbol{x}_i \in W_i) \tag{50}$$

に $\boldsymbol{x}_1 = \cdots = \boldsymbol{x}_{j-1} = \boldsymbol{x}_{j+1} = \cdots = \boldsymbol{x}_s = \boldsymbol{0}$ 以外の表し方があるとすると、それによって、$\boldsymbol{y} \in W_j \subset V$ が

$$\begin{aligned} \boldsymbol{y} &= \boldsymbol{0} + \cdots + \boldsymbol{0} + \boldsymbol{y} + \boldsymbol{0} + \cdots + \boldsymbol{0} \\ &= \boldsymbol{x}_1 + \cdots + \boldsymbol{x}_{j-1} + \boldsymbol{y} + \boldsymbol{x}_{j+1} + \cdots + \boldsymbol{x}_s \end{aligned}$$

と二通りに表せることになり、矛盾する。従って式 (50) には、$\boldsymbol{x}_1 = \cdots = \boldsymbol{x}_{j-1} = \boldsymbol{x}_{j+1} = \cdots = \boldsymbol{x}_s = \boldsymbol{0}$ 以外の表し方はなく、定理 C.7 により

$$U_j = W_1 \oplus \cdots \oplus W_{j-1} \oplus W_{j+1} \oplus \cdots \oplus W_s$$

である。

(ii)$V = W_j \oplus U_j$ かつ $U_j = W_1 \oplus \cdots \oplus W_{j-1} \oplus W_{j+1} \oplus \cdots \oplus W_s$ のときは、明らかである。

よって示された。 証明終

C.3.1　直和と同値な条件

まずは共通部分関連。

定理 C.9 $V = W_1 + \cdots + W_s$ であるとき、$U_j = W_1 + \cdots + W_{j-1} + W_{j+1} + \cdots + W_s$ と表すことにすると、

$$V = W_1 \oplus \cdots \oplus W_s$$

であることと

$$W_j \cap U_j = \{\mathbf{0}\} \quad (j = 1, \cdots, s)$$

であることは同値である。

(proof)

(i)$V = W_1 \oplus \cdots \oplus W_s$ であるとき。

補題 C.8 より $V = W_j \oplus U_j$ である。ここで、$W_j \cap U_j$ に $\mathbf{0}$ でない元 $\boldsymbol{a}$ があるとすると、

$$\mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{0} = \boldsymbol{a} + (-\boldsymbol{a})$$

と、V の元である $\mathbf{0}$ を W_j と U_j の和として表すやり方が二通りあることになり、$V = W_j \oplus U_j$ に矛盾する。従って、

$$W_j \cap U_j = \{\mathbf{0}\}$$

である。

(ii)$W_j \cap U_j = \{\mathbf{0}\} \quad (j = 1, \cdots, s)$ であるとき。

V の任意の要素 $\boldsymbol{x}$ を、

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_1 + \cdots + \boldsymbol{x}_s = \boldsymbol{x}'_1 + \cdots + \boldsymbol{x}'_s \quad (\boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{x}'_i \in W_i)$$

と表したとき、

$$(\boldsymbol{x}_j - \boldsymbol{x}'_j) = (\boldsymbol{x}'_1 - \boldsymbol{x}_1) + \cdots + (\boldsymbol{x}'_{j-1} - \boldsymbol{x}_{j-1}) + (\boldsymbol{x}'_{j-1} - \boldsymbol{x}_{j-1}) + \cdots + (\boldsymbol{x}'_s - \boldsymbol{x}_s)$$

が成り立つ。左辺は W_j の要素であり、右辺は U_j の要素である。従って両辺は $W_j \cap U_j$ の要素でなければならない。$W_j \cap U_j = \{\mathbf{0}\}$ なので $\boldsymbol{x}_j - \boldsymbol{x}'_j = \mathbf{0} \quad \boldsymbol{x}_j = \boldsymbol{x}'_j$ である。これは $j = 1, \cdots, s$ について成り立つので、$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_1 + \cdots + \boldsymbol{x}_s$ と表すやり方は一意的であり、$V = W_1 \oplus \cdots \oplus W_s$ である。 証明終

$dimW = 0 \leftrightarrow W = \{\mathbf{0}\}$ に注意すれば、次元との関係も見えてくる。

定理 C.10 $V = W_1 + \cdots + W_s$ であるとき、

$$V = W_1 \oplus \cdots \oplus W_s$$

であることと

$$dimV = dimW_1 + \cdots + dimW_s$$

であることは同値である。

(proof)

(i)$V = W_1 \oplus \cdots \oplus W_s$ であるとき。

帰納法による。s=1 の時は明らか。s=k-1 のとき成り立つとして s=k の時を考える。$U_s = W_1 + \cdots + W_{s-1}$ と表すことにすると、補題 C.8 より

$$V = U_s \oplus W_s \text{かつ } U_s = W_1 \oplus \cdots \oplus W_{s-1}$$

である。まず仮定より $dimU_s = dimW_1 + \cdots + dimW_{s-1}$ である。また、定理 C.5 より $dimU_s + dimW_s = dim(U_s + W_s) + dim(U_s \cap W_s)$ である。ここで定理 C.9 より $U_s \cap W_s = \{\mathbf{0}\}$ なので $dim(U_s \cap W_s) = 0$ であり、また $V = U_s + W_s$ であるから、

$$dimV = dimU_s + dimW_s = dimW_1 + \cdots + dimW_{s-1} + dimW_s$$

である。

(ii)$dimV = dimW_1 + \cdots + dimW_s$ であるとき。

$U_j = W_1 + \cdots + W_{j-1} + W_{j+1} + \cdots + W_s$ と表すことにすると、$V = U_j + W_j$ である。定理 C.5 より $dimU_j + dimW_j = dim(U_j + W_j) + dim(U_j \cap W_j)$ なので

$$\begin{aligned} dim(U_j \cap W_j) &= dimU_j + dimW_j - dimV \\ &= dimU_j - (dimW_1 + \cdots + dimW_{j-1} + dimW_{j+1} + \cdots + dimW_s) \end{aligned}$$

である。ここで定理 C.6 より

$$dimU_j \leq dimW_1 + \cdots + dimW_{j-1} + dimW_{j+1} + \cdots + dimW_s$$

なので

$$dim(U_j \cap W_j) \leq 0$$

次元は負にはならないので $dim(U_j \cap W_j) = 0$、つまり

$$U_j \cap W_j = \{\mathbf{0}\} \quad (j = 1, \cdots, s)$$

である。従って、定理 C.9 より

$$V = W_1 \oplus \cdots \oplus W_s$$

である。 証明終

直和に同値な条件をまとめておく。

$V = W_1 + \cdots + W_s$ であるとき、$U_j = W_1 + \cdots + W_{j-1} + W_{j+1} + \cdots + W_s$ と表すことにすると、以下の条件は同値である。

1. $V = W_1 \oplus \cdots \oplus W_s$
2. $\mathbf{0} = \boldsymbol{x}_1 + \cdots + \boldsymbol{x}_s \quad (\boldsymbol{x}_i \in W_i)$ と表すやりかたは $\boldsymbol{x}_1 = \mathbf{0}, \cdots, \boldsymbol{x}_s = \mathbf{0}$ という自明な表し方しかない。
3. $W_j \cap U_j = \{\mathbf{0}\} \quad (j = 1, \cdots, s)$
4. $dimV = dimW_1 + \cdots + dimW_s$

C.3.2 線形部分空間からの直和の構成

定理 C.11 線形空間 V とその線形部分空間 W について、$V = W \oplus W'$ となるような W' が存在する。

(proof)

W の基底を $\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_r$ とし、定理??に基づき、これを拡大して V の基底 $\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_r, \boldsymbol{e}_{r+1}, \cdots, \boldsymbol{e}_n$ をつくる。このとき、$\boldsymbol{e}_{r+1}, \cdots, \boldsymbol{e}_n$ が張る空間を W' とすると、V は基底 $\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_r, \boldsymbol{e}_{r+1}, \cdots, \boldsymbol{e}_n$ の張る空間なので、明らかに $V = W + W'$ である。また、基底 $\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_r, \boldsymbol{e}_{r+1}, \cdots, \boldsymbol{e}_n$ が線形独立なので、その部

分集合である $\boldsymbol{e}_{r+1}, \cdots, \boldsymbol{e}_n$ も線形独立であり、$\boldsymbol{e}_{r+1}, \cdots, \boldsymbol{e}_n$ は W' の基底である。したがって、$\dim W' = n - r, \dim V = n, \dim W = r$ であり

$$\dim V = \dim W + \dim W'$$

が成り立つので、定理 C.10 より $V = W \oplus W'$ である。 証明終

上の証明で、W の基底を拡大して V の基底を作るときに任意性がある。そのため、W に対して $V = W \oplus W'$ となる W' は一意でない[37]。

C.4 線形写像

定義 C.3 K を体、V, W を K 上のベクトル空間とする。写像 $A : V \to W$ について、任意の $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V$ と任意の $a \in K$ に対して

$$A(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) = A\boldsymbol{x} + A\boldsymbol{y} \tag{51}$$

$$A(a\boldsymbol{x}) = a(A\boldsymbol{x}) \tag{52}$$

が成り立つとき、写像 A は $K-$ **線形写像・線形作用素**であるという。K を明示する必要がないときは単に**線形写像・線形作用素**という。また、V からそれ自身への線形写像は、V の**線形変換**と呼ばれる。◂

定義 C.4 線形写像 A の**像**は $\mathrm{Im}A (= \{A\boldsymbol{x}; \boldsymbol{x} \in V\})$ と表す。また、**核**は $\ker A \equiv \{\boldsymbol{x}; A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}\}$ と定義される。簡単な考察により、これらが線形空間になることがわかる。像の次元を**階数**といい、$\mathrm{rank}A \equiv \dim(\mathrm{Im}A)$ と表わす。 ◂

C.5 核・像・次元公式

定理 C.12 （次元公式）線形空間 V, V' と線形写像 $A : V \to V'$ について

$$\dim V = \dim(\ker A) + \mathrm{rank}A$$

(proof)
省略。 証明終

A が線形変換 $V \to V$ ならば、$\mathrm{Im}A$ も線形空間 V の部分空間である。このとき、一般には $\ker A \cap \mathrm{Im}A \neq \{\mathbf{0}\}$ である[38]。$\mathbf{0}$ しか共通部分を持たないときは、次の定理のようになる。

定理 C.13 線形空間 V と、線形変換 $A : V \to V$ について、$\ker A \cap \mathrm{Im}A = \{\mathbf{0}\}$ ならば $V = \ker A \oplus \mathrm{Im}A$ である。

(proof)
$\ker A, \mathrm{Im}A$ は V の線形部分空間なので $\ker A + \mathrm{Im}A \subset V$ である。また、定理 C.5 より

$$\begin{aligned}\dim(\ker A + \mathrm{Im}A) &= \dim(\ker A) + \dim(\mathrm{Im}A) - \dim(\ker A \cap \mathrm{Im}A)\\ &= \dim(\ker A) + \dim(\mathrm{Im}A)\\ &= \dim V \quad \because \text{次元公式}\end{aligned}$$

---

[37] 二次元平面を考えるとわかりやすい。x 軸を固定して、もう一つ y 軸を作るとき、並行でないようにさえすれば、x 軸と y 軸の直和によって二次元平面は表される。

[38] まだ説明をしていないが、行列で例を挙げると、例えば $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ とすると、$A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$, $A\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}$ である。

なので、定理 C.4 より $V = \ker A + \mathrm{Im} A$ であり、従って、次元公式と定理 C.10 より

$$V = \ker A \oplus \mathrm{Im} A$$

となる。 $\boxed{\text{証明終}}$

D　ノルム空間

D.1　ノルム空間・バナッハ空間

定義 D.1 V を複素数体 $\boldsymbol{C}$ か実数体 $\boldsymbol{R}$ 上の線形空間とする。V から $\boldsymbol{R}$ への関数 $(\boldsymbol{x} \mapsto \|\boldsymbol{x}\|)$ で

1. $\|\boldsymbol{x}\| \geq 0$　(正値性)
2. $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \iff \|\boldsymbol{x}\| = 0$
3. $\|k\boldsymbol{x}\| = |k|(\|\boldsymbol{x}\|)$　(斉次性)
4. $\|\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}\| \leq \|\boldsymbol{x}\| + \|\boldsymbol{y}\|$　(三角不等式)

を満たすものを、**ノルム**という。V に対してノルムを指定したものを、**ノルム空間**という。◀

例えば、一次元の線形空間である $\boldsymbol{C}$ に対して、絶対値 $|x|$ はノルムである。

定理 D.1 ノルム空間 V は、距離関数 $d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \equiv \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|$ によって、距離空間となる。

よって、ノルム空間では、位相（開集合・閉集合・連続・コンパクトなど）と収束をこの距離によって考えることができる。

定理 D.2 ノルムは連続である。

(proof)
$\|\boldsymbol{x}\| = d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{0})$ であり、定理 B.20 にあるように距離関数は連続なので、ノルムも連続写像である。 証明終

定義 D.2 ノルム空間が、コーシー完備であるとき、**バナッハ空間**という。◀

ノルムの例としては、以下のようなものがある。ノルムであることの証明は省略する。基本的に、三角不等式が難しい。

定義 D.3 $\boldsymbol{x} = (x_1, \cdots, x_n)^T \in \boldsymbol{C^n}$ or $\boldsymbol{R^n}$ と $p \geq 1$ に対して

$$\|\boldsymbol{x}\|_p \equiv \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

を、$p-$ **ノルム**と言う。特に、$p = 2$ のときは、**ユークリッドノルム**とも言われる。◀

定義 D.4 $\boldsymbol{x} = (x_1, \cdots, x_n)^T \in \boldsymbol{C^n}$ or $\boldsymbol{R^n}$ に対して

$$\|\boldsymbol{x}\|_p \equiv \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

を、$\infty-$ **ノルム・*sup* ノルム・最大値ノルム**と言う。◀

D.2　有界作用素

定義 D.5 V, W をノルム空間とし、線形作用素 $A : V \to W$ が、任意の $\boldsymbol{x} \in V$ について

$$\|A\boldsymbol{x}\| \leq M\|\boldsymbol{x}\|$$

となるような正数 M が存在するとき、A は**有界作用素**であるという。◀

定理 D.3 線形作用素が、有界作用素であることと、連続であることは同値である。

(proof)

$A : V \to W$ が有界作用素であるとき。任意の $\boldsymbol{a} \in V$ をとる。$\boldsymbol{a}$ に収束する任意の点列 $\{\boldsymbol{x}_n\}$ について、収束の定義より $\lim_{n\to\infty} \|\boldsymbol{x}_n - \boldsymbol{a}\| = 0$ となっている。定理 B.19 より

$$\lim_{n\to\infty} A\boldsymbol{x}_n = A\boldsymbol{a} \quad \Longleftrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} \|A\boldsymbol{x}_n - A\boldsymbol{a}\| = 0$$

となればよい。A が有界作用素であることを用いると、正数 M が存在して

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \|A\boldsymbol{x}_n - A\boldsymbol{a}\| &= \lim_{n\to\infty} \|A(\boldsymbol{x}_n - \boldsymbol{a})\| \\
&\geq \lim_{n\to\infty} M\|\boldsymbol{x}_n - \boldsymbol{a}\| \\
&= 0
\end{aligned}$$

であり、$\boldsymbol{a} \in V$ は任意だったので、A は連続である。

$A : V \to W$ が有界作用素でないとき、適当に $\boldsymbol{x}$ を選べば、$\dfrac{\|A\boldsymbol{x}\|}{\|\boldsymbol{x}\|}$ はどんな正数より大きくとれる。したがって

$$\frac{\|A\boldsymbol{x}_n\|}{\|\boldsymbol{x}_n\|} > n$$

となる V の点列 $\{\boldsymbol{x}_n\}$ をとれる。ここで、$\boldsymbol{y}_n \equiv \dfrac{\boldsymbol{x}}{n\|\boldsymbol{x}\|}$ とおくと、$\|\boldsymbol{y}_n\| = \dfrac{1}{n}$ であり $n \to \infty$ のとき $\boldsymbol{y}_n \to \boldsymbol{0}$ となる。また

$$\|A\boldsymbol{y}_n\| = \frac{\|A\boldsymbol{x}_n\|}{n\|\boldsymbol{x}_n\|} > 1$$

であるから、$n \to \infty$ のとき $A\boldsymbol{y}_n \to A\boldsymbol{0} = \boldsymbol{0}$ とはならない。したがって、定理 B.19 より A は連続でない。この対偶を取ると、連続ならば有界作用素となる。よって示された。 $\boxed{\text{証明終}}$

E　内積空間・ヒルベルト空間

E.1　内積

定義 E.1 K を複素数体 $\boldsymbol{C}$ か実数体 $\boldsymbol{R}$ とする。V を K 上の線形空間として、$V \times V$ から K への関数（$V \ni \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \mapsto (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$）で以下の性質

1. $(\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{y}) + (\boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{y})$　　（線形性）
2. $(c\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = c(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$　　（線形性）
3. $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \overline{(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})}$　（共役対称性）
4. $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) \geq 0$　(等号となるのは $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の時のみ)　　（正値性）[39]

を満たすものを**内積**といい、内積を持つ線形空間を**内積空間・計量線形空間**という。内積は $\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y}$ とも表される。また、$K = \boldsymbol{C}$ のときは、**複素計量空間・複素内積空間・ユニタリー空間**ともいい、$K = \boldsymbol{R}$ のときは、**実計量空間・実内積空間・ユークリッド線形空間**とも言う。◂

実数は複素数に含まれるので、以下では複素数上の内積空間を主に扱うことにする。

定理 E.1 内積は、以下の性質を満たす。

1. $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}_1 + \boldsymbol{y}_2) = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}_1) + (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}_2)$
2. $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \overline{c}(\boldsymbol{x}, c\boldsymbol{y})$
3. $(\boldsymbol{0}, \boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{0}) = 0$

(proof)
式 1. 2. については、内積の定義式の 1.2. について複素共役を取って 3. を用いる。式 3. については、内積の定義式の 2. について c=0 とし、さらに 3. を用いればよい。 $\boxed{\text{証明終}}$

次の性質は、よく用いられる。

定理 E.2 任意の $\boldsymbol{x} \in V$ について $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a}) = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{b})$ ならば $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}$ である。

(proof)
$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}) = 0$ が任意の $\boldsymbol{x}$ について成立するので $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}$ とすれば $(\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}, \boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}) = 0$ であり、内積の性質より $\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$ である。 $\boxed{\text{証明終}}$

E.2　内積から導かれるノルム・位相

内積からは、自然にノルムが導かれる。明示せずに用いられることもあるだろう。

定理 E.3 内積空間上のベクトル $\boldsymbol{x}$ について

$$\|\boldsymbol{x}\| = \sqrt{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})}$$

と定義すると、$\|\boldsymbol{x}\|$ はノルムとなる。

[39] (x, x) が実数であることは、式 3. から示せる。

(proof)
三角不等式のみ示す。他は容易である。二乗して

$$\begin{aligned}\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\|^2 &= (\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y},\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})\\ &= (\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})+(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})+(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x})+(\boldsymbol{y},\boldsymbol{y})\\ &= \|\boldsymbol{x}\|^2+2Re((\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}))+\|\boldsymbol{y}\|^2\\ &\le \|\boldsymbol{x}\|^2+2|(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})|+\|\boldsymbol{y}\|^2\\ &\le \|\boldsymbol{x}\|^2+2\|\boldsymbol{x}\|\|\boldsymbol{y}\|+\|\boldsymbol{y}\|^2 \quad \because \text{シュヴァルツの不等式}\\ &= (\|\boldsymbol{x}\|+\|\boldsymbol{y}\|)^2\end{aligned}$$

この正の平方根をとればよい。 証明終

従って、内積空間はノルム空間となり、収束や位相の概念が持ち込める。

定義 E.2 内積空間が、コーシー完備であるとき、**ヒルベルト空間**という。◂

一般に、加算無限個の和を考えようとしたとき、極限が存在するかは、考えなければならないことである。有限次元では、基底に持ち込めば話は簡単になるが、無限次元ではそうもいかない。そこで、無限次元のノルム空間や内積空間では、完備性の条件を付加することによって、無限和を扱いやすくすることが考えられることになる。その結果こそまさにヒルベルト空間やバナッハ空間である。線形空間の理論の主な展開は、有限次元か、完備な空間かのどちらかの方向を向いている。

内積から導かれるノルムは、内積と以下のような関係がある。

定理 E.4 $|(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})| \le \|\boldsymbol{x}\|\ \|\boldsymbol{y}\|$ （シュヴァルツの不等式）

(proof)
$\|\boldsymbol{y}\|^2\boldsymbol{x}-(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x})\boldsymbol{y}$ のノルムが正であることを用いる。

$$\begin{aligned}0 &\le (\|\boldsymbol{y}\|\boldsymbol{x}-(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x})\boldsymbol{y},\|\boldsymbol{y}\|\boldsymbol{x}-(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x})\boldsymbol{y})\\ &= \|\boldsymbol{y}\|^4\|\boldsymbol{x}\|^2-\|\boldsymbol{y}\|^2(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x})(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})-\|\boldsymbol{y}\|^2\overline{(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x})}(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x})+\overline{(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x})}(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x})\|\boldsymbol{y}\|^2\\ &= \|\boldsymbol{y}\|^2(\|\boldsymbol{x}\|^2\|\boldsymbol{y}\|^2-|(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})|^2)\end{aligned}$$

故に

$$|(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})|^2 \le (\|\boldsymbol{x}\|\|\boldsymbol{y}\|)^2$$
$$|(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})| \le \|\boldsymbol{x}\|\|\boldsymbol{y}\|$$

となる。 証明終

ノルムの導入によって、連続の概念も考えられるようになる。

定理 E.5 内積は連続である。

(proof)
内積空間を V とし、その任意の元を $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ とする。$\boldsymbol{a}$ に収束する任意の点列 $\{\boldsymbol{x}_n\}$ と、$\boldsymbol{b}$ に収束する任意の点列 $\{\boldsymbol{y}_n\}$ を考えると、収束しているということは

$$\lim_{n\to\infty}\|\boldsymbol{x}_n-\boldsymbol{a}\|=0$$
$$\lim_{n\to\infty}\|\boldsymbol{y}_n-\boldsymbol{b}\|=0$$

となっているということである。ここで

$$\begin{aligned}
|(\boldsymbol{x}_n,\boldsymbol{y}_n)-(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})| &= |(\boldsymbol{x}_n,\boldsymbol{y}_n)-(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})| \\
&= |(\boldsymbol{x}_n,\boldsymbol{y}_n-\boldsymbol{b})+(\boldsymbol{x}_n-\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})| \\
&\leq |(\boldsymbol{x}_n,\boldsymbol{y}_n-\boldsymbol{b})|+|(\boldsymbol{x}_n-\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})| \\
&\leq \|\boldsymbol{x}_n\|\ \|\boldsymbol{y}_n-\boldsymbol{b}\|+\|\boldsymbol{x}_n-\boldsymbol{a}\|\ \|\boldsymbol{b}\| \quad \because \text{シュバルツの不等式}
\end{aligned}$$

であり、$n\to\infty$ とすると $|(\boldsymbol{x}_n,\boldsymbol{y}_n)-(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})|\to 0$ である。つまり、任意の $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ について、$\boldsymbol{a}$ に収束する任意の点列 $\{\boldsymbol{x}_n\}$ と、$\boldsymbol{b}$ に収束する任意の点列 $\{\boldsymbol{y}_n\}$ を考えると

$$\lim_{n\to\infty}(\boldsymbol{x}_n,\boldsymbol{y}_n)=(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$$

となっており、定理 B.19 より、内積は連続である。 $\boxed{\text{証明終}}$

定理 E.6 内積から導かれるノルムについては

$$Re\{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\}=\frac{1}{4}(\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\|^2-\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|^2) \tag{53}$$

$$Im\{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\}=-\frac{1}{4}(\|i\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\|^2-\|i\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|^2) \tag{54}$$

が成立する。

(proof)
省略。 $\boxed{\text{証明終}}$

定理 E.7 （中線定理・フォンノイマンの定理）内積から導かれたノルムについては、中線定理と呼ばれる命題

$$\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\|^2+\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|^2=2(\|\boldsymbol{x}\|^2+\|\boldsymbol{y}\|^2)$$

が成り立っている。逆に中線定理を満たすノルムは、式 (53)(54) によって、$(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ を定義すると、$(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ が内積となり、その内積から導いたノルムが元のノルムに一致する。（フォンノイマンの定理）

(proof)
省略。 $\boxed{\text{証明終}}$

E.3 閉部分空間

定義 E.3 ヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ の線形部分空間 E が閉集合であるとき、**閉部分空間**という。◂

E のコーシー列は、当然 $\mathcal{H}$ のコーシー列なので、一般には $\mathcal{H}$ の中では収束し極限が存在する。閉集合という条件がつくと、定理 B.12 より、その極限が E に属すことが保証され、E 自身がコーシー完備ということになる。線形部分空間であることも考えると、ヒルベルト空間の**閉部分空間は、それ自体でもヒルベルト空間**になっている。

定理 E.8 （リースの補題）ヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ の閉部分空間 $E(\neq\mathcal{H})$ について

$$\forall\boldsymbol{x}\in E,\ (\boldsymbol{x},\boldsymbol{z}_0)=0 \quad \boldsymbol{z}_0\neq\boldsymbol{0}$$

が成立する $\boldsymbol{z}_0\in\mathcal{H}\backslash E$ が存在する。

(proof)

ある $\boldsymbol{y} \in \mathcal{H} \backslash E$ をとっておく。$d \equiv \inf_{\boldsymbol{x} \in E} \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|$ とおく。ノルムは明らかに下に有界なので、実数の順序完備性よりこの下限は必ず存在する。任意の自然数 n に対して $d + \dfrac{1}{n} > d = \inf_{\boldsymbol{x} \in E} \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|$ なので、下限の定義より $d + \dfrac{1}{n} > \|\boldsymbol{x}_n - \boldsymbol{y}\|$ となる $\boldsymbol{x}_n \in E$ が存在する。$d \leq \|\boldsymbol{x}_n - \boldsymbol{y}\|$ は明らかなので

$$d \leq \|\boldsymbol{x}_n - \boldsymbol{y}\| < d + \frac{1}{n}$$

であり、挟撃原理より

$$\lim_{n \to \infty} \|\boldsymbol{x}_n - \boldsymbol{y}\| = d$$

となる。この E の点列 $\{\boldsymbol{x}_n\}$ について

$$\begin{aligned}
\|\boldsymbol{x}_n - \boldsymbol{x}_m\|^2 &= \|(\boldsymbol{x}_n - \boldsymbol{y}) - (\boldsymbol{x}_m - \boldsymbol{y})\|^2 \\
&= 2\|\boldsymbol{x}_n - \boldsymbol{y}\|^2 + 2\|\boldsymbol{x}_m - \boldsymbol{y}\|^2 - \|\boldsymbol{x}_n + \boldsymbol{x}_m - 2\boldsymbol{y}\|^2 \quad \because \text{中線定理} \\
&= 2\|\boldsymbol{x}_n - \boldsymbol{y}\|^2 + 2\|\boldsymbol{x}_m - \boldsymbol{y}\|^2 - 4\left\|\frac{\boldsymbol{x}_n + \boldsymbol{x}_m}{2} - \boldsymbol{y}\right\|^2 \\
&\leq 2\|\boldsymbol{x}_n - \boldsymbol{y}\|^2 + 2\|\boldsymbol{x}_m - \boldsymbol{y}\|^2 - 4d^2 \quad \because \frac{\boldsymbol{x}_n + \boldsymbol{x}_m}{2} \in E \\
&\to 2d^2 + 2d^2 - 4d^2 = 0
\end{aligned}$$

であり、$\{\boldsymbol{x}_n\}$ はコーシー列である。したがって、ヒルベルト空間のコーシー完備性より、これは極限 $\boldsymbol{x}^*$ を持ち、E が閉集合であることから定理 B.12 より $\boldsymbol{x}^* \in E$ である。また、ノルムの連続性（定理 D.2）より

$$\|\boldsymbol{x}^* - \boldsymbol{y}\| = \lim_{n \to \infty} \|\boldsymbol{x}_n - \boldsymbol{y}\| = d$$

である。このとき、任意の $\boldsymbol{x} \in E$ と任意の複素数 α に対して $\boldsymbol{x}^* + \alpha\boldsymbol{x} \in E$ であり

$$\begin{aligned}
0 &\leq \|(\boldsymbol{x}^* + \alpha\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{y}\|^2 - d^2 \\
&= \|(\boldsymbol{x}^* + \alpha\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{y}\|^2 - \|\boldsymbol{x}^* - \boldsymbol{y}\|^2 \\
&= 2Re\{\overline{\alpha}(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{x})\} + |\alpha|^2 \ \|\boldsymbol{x}^*\|^2
\end{aligned}$$

となる。任意の実数 λ に対して、$\alpha = \lambda(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{x})$ とおくと

$$\begin{aligned}
0 &\leq 2Re\{\overline{\lambda(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{x})}(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{x})\} + |\lambda(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{x})|^2 \ \|\boldsymbol{x}^*\|^2 \\
&= 2\lambda|(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{x})|^2 + \lambda^2|(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{x})|^2 \ \|\boldsymbol{x}^*\|^2 \\
&= \lambda|(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{x})|^2\{2 + \lambda\|\boldsymbol{x}^*\|^2\}
\end{aligned}$$

であり、例えば $\lambda = 1, a(2 + a\|\boldsymbol{x}^*\|^2 \neq 0$ なる負の数) を代入することにより

$$|(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{x})|^2 = 0 \quad \Longrightarrow (\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{x}) = 0$$

が必要であるとわかる。このとき $\boldsymbol{x} \in E$ は任意であり、$\boldsymbol{z}_0 = \boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}^*$ とおけば、$\boldsymbol{y} \in E^c, \boldsymbol{x} \in E$ なので $d = \|\boldsymbol{x}^* - \boldsymbol{y}\| > 0$ であり、$\|\boldsymbol{z}_0\| = d > 0$ から $\boldsymbol{z}_0 \neq \boldsymbol{0}$ も言えて、$\boldsymbol{z}_0$ が所望の $\boldsymbol{z}_0$ であることがわかる。また、$\boldsymbol{z}_0 \in E$ と仮定すると、$(\boldsymbol{z}_0, \boldsymbol{z}_0) = 0$ つまり $\boldsymbol{z}_0 = \boldsymbol{0}$ でなければならなくなるので、$\boldsymbol{z}_0 \notin E$ である。 証明終

定理 E.9 有界作用素 A に対して、その核 $\ker A$ は閉部分空間である。

(proof)

定理 D.3 より、A は連続写像でもある。核が部分空間であることは明らかなので、閉集合であることを示す。$\ker A$ の任意の収束列 $\{\boldsymbol{x}_n\}$ をとり、その極限を $\boldsymbol{x}$ とする。このとき $A\boldsymbol{x}_n = \boldsymbol{0}$ であり、連続性を使うと

$$A\boldsymbol{x} = \lim_{n \to \infty} A\boldsymbol{x}_n = \boldsymbol{0}$$

であり、$\boldsymbol{x} \in \ker A$ である。よって、定理 B.13 より $\ker A$ は閉集合である。 証明終

E.4　直交補空間

定義 E.4 ヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ の閉部分空間 W に対して $W^{\perp} \equiv \{\boldsymbol{x} \in \mathcal{H}; \forall \boldsymbol{y} \in W,\ (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = 0)$ を**直交補空間**という。リースの補題 *E.8* より、$W \neq \mathcal{H}$ ならば $W^{\perp} \neq \{\boldsymbol{0}\}$ である。◂

定理 E.10 直交補空間は、閉部分空間である。

(proof)

部分線形空間であることは、内積の線形性より容易にわかる。あとは、閉集合であることを示す。ヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ の閉部分空間 W とその直交補空間 $W^{\perp}$ を考える。$W^{\perp}$ の任意の収束列 $\{\boldsymbol{y}_n\}$ ($\lim_{n\to\infty} \boldsymbol{y}_n = \boldsymbol{y}$) について、任意の $\boldsymbol{x} \in W$ をとると、直交補空間の定義より $(\boldsymbol{y}_n, \boldsymbol{x}) = 0$ である。したがって、内積の連続性定理 E.5 より

$$(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}) = \lim_{n\to\infty} (\boldsymbol{y}_n, \boldsymbol{x}) = 0$$

であり、$\boldsymbol{x} \in W$ は任意だったので、直交補空間の定義より $\boldsymbol{y} \in W$ である。よって、定理 B.13 より $W^{\perp}$ は閉集合である。よって示された。 証明終

補題 E.11 ヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ の閉部分空間 W について、$W \cap W^{\perp} = \{\boldsymbol{0}\}$ である。

(proof)

$\boldsymbol{x} \in W \cap W^{\perp}$ とすると、W の元と $W^{\perp}$ の元の内積は常に 0 なので

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = \|\boldsymbol{x}\|^2 = 0$$

つまり $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ である。 証明終

定理 E.12 ヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ の閉部分空間 W について、$\mathcal{H} = W \oplus W^{\perp}$ である。

(proof)

直前の補題から $W \cap W^{\perp} = \{\boldsymbol{0}\}$ であり、定理 C.9 より $W + W^{\perp} = W \oplus W^{\perp}$ は示されている。後は、$\mathcal{H} = W + W^{\perp}$ を示せばよい。ここで $\mathcal{H} \neq W + W^{\perp}$ を仮定すると、リースの補題 E.8 より、$\forall \boldsymbol{x} \in W + W^{\perp}$ に対して $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}_0) = 0$ なる $\boldsymbol{z}_0 \notin W + W^{\perp}, \boldsymbol{z}_0 \neq \boldsymbol{0}$ が存在する。しかし、これについては、$\forall \boldsymbol{x} \in W$ について $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}_0) = 0$ なのだから、$\boldsymbol{z}_0 \in W^{\perp}$ でなければならず、$\boldsymbol{z}_0 \notin W + W^{\perp}$ に矛盾する。よって示された。 証明終

定理 E.13 ヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ の閉部分空間 W について、$(W^{\perp})^{\perp} = W$ である。

(proof)

まず、$\boldsymbol{x} \in W$ について、任意の $\boldsymbol{y} \in W^{\perp}$ をとると $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = 0$ である。よって、$\boldsymbol{x} \in (W^{\perp})^{\perp}$ である。従って $W \subset (W^{\perp})^{\perp}$ となる。

逆に、$\boldsymbol{x} \in (W^{\perp})^{\perp}$ について。直前の定理より $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_{\perp},\ \boldsymbol{x}_1 \in W, \boldsymbol{x}_{\perp} \in W^{\perp}$ と一意的に直和分解される。また、$\boldsymbol{x} \in (W^{\perp})^{\perp},\ \boldsymbol{x}_{\perp} \in W^{\perp}$ より $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}_{\perp}) = 0$ である。よってこれを変形して

$$\begin{aligned} 0 = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}_{\perp}) &= (\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_{\perp}) + (\boldsymbol{x}_{\perp}, \boldsymbol{x}_{\perp}) \\ &= 0 + \|\boldsymbol{x}_{\perp}\|^2 \quad \because \boldsymbol{x}_1 \in W,\ \boldsymbol{x}_{\perp} \in W^{\perp} \end{aligned}$$

なので、$\boldsymbol{x}_{\perp} = \boldsymbol{0}$ つまり $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_1 \in W$ である。したがって、$W \supset (W^{\perp})^{\perp}$ となり、上とあわせると $W = (W^{\perp})^{\perp}$ が示される。 証明終

E.5　線形汎関数・リースの定理

以下ではやはり $K = \boldsymbol{R}$ *or* $\boldsymbol{C}$ とする。このとき、絶対値をノルムとして、K は1次元のノルム空間でもあることに注意せよ。

定義 E.5 K 上の線形空間 V から K への写像 f が線形写像であるとき、f を**線形汎関数**[40]という。線形汎関数は、線形作用素の一種である。◂

定理 E.14 （リースの定理）K 上のヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ 上の連続な線形汎関数 f について、f に対して唯一の $\boldsymbol{z} \in \mathcal{H}$ が存在して

$$\forall \boldsymbol{x} \in \mathcal{H}, \quad f(\boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z})$$

と表される。

(proof)

定理 E.9 より $\ker f$ は閉部分空間である。$\ker f = \mathcal{H}$ のときは、常に $f(\boldsymbol{x}) = 0$ なので、$\boldsymbol{z} = \boldsymbol{0}$ とすればよい。$\ker f \neq \mathcal{H}$ のときは、定理 E.12 より $\ker f \oplus \ker f^{\perp} = \mathcal{H}$ なので、$\ker f^{\perp} \geq 1$ である。

ここで、$\ker f^{\perp} > 1$ と仮定すると、線形独立な（当然非ゼロベクトルの）$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \ker f^{\perp}$ が存在する。定理 E.11 より

$$\ker f \cap \ker f^{\perp} = \{\boldsymbol{0}\}$$

であるから、$f(\boldsymbol{a}) \neq 0, f(\boldsymbol{b}) \neq 0$ である。よって、適当な $K \ni k \neq 0$ によって $f(\boldsymbol{a}) = kf(\boldsymbol{b})$ となる。f は線形なので $f(\boldsymbol{a} - k\boldsymbol{b}) = 0$ すなわち $\boldsymbol{a} - k\boldsymbol{b} \in \ker f$ である。ところが、$\ker f^{\perp}$ は線形部分空間なので $\boldsymbol{a} - k\boldsymbol{b} \in \ker f^{\perp}$ である。したがって、$\boldsymbol{a} - k\boldsymbol{b} \in \ker f \cap \ker f^{\perp} = \{\boldsymbol{0}\}$ つまり $\boldsymbol{a} = k\boldsymbol{b}$ である。これは、$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ が線形独立であるという条件に反している。ゆえに $\ker f^{\perp} = 1$ である。

したがって、$\boldsymbol{z}_1 \neq \boldsymbol{0}$ なる $\ker f^{\perp}$ の元 $\boldsymbol{z}_1$ がとれて、1次元であることより任意の $\ker f^{\perp}$ の元は $k\boldsymbol{z}_1$ $(k \in K)$ と表わされる。定理 E.12 より $\mathcal{H} = \ker f \oplus \ker f^{\perp}$ なので、任意の $\boldsymbol{x} \in \mathcal{H}$ は

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_{\ker} + k\boldsymbol{z}_1 \ (\boldsymbol{z}_{\ker} \in \ker f,\ k \in K)$$

と一意的に直和分解される。このとき

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{x}) &= f(\boldsymbol{x}_{\ker}) + kf(\boldsymbol{z}_1) \quad \because \text{線形汎関数} \\ &= kf(\boldsymbol{z}_1) \quad \because \boldsymbol{x}_{\ker} \in \ker f \end{aligned}$$

である。また

$$\begin{aligned} (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}_1) &= (\boldsymbol{x}_{\ker}, \boldsymbol{z}_1) + k(\boldsymbol{z}_1, \boldsymbol{z}_1) \\ &= k\|\boldsymbol{z}_1\|^2 \quad \because \boldsymbol{z}_{\ker} \in \ker f,\ \boldsymbol{z}_1 \in \ker f^{\perp} \\ k &= \frac{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}_1)}{\|\boldsymbol{z}_1\|^2} \quad \because \boldsymbol{z}_1 \neq \boldsymbol{0} \end{aligned}$$

なので

$$f(\boldsymbol{x}) = \frac{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}_1)}{\|\boldsymbol{z}_1\|^2} f(\boldsymbol{z}_1) = \left(\boldsymbol{x}, \frac{f(\boldsymbol{z}_1)}{\|\boldsymbol{z}_1\|^2}\boldsymbol{z}_1\right)$$

であり、$\boldsymbol{z} = \dfrac{f(\boldsymbol{z}_1)}{\|\boldsymbol{z}_1\|^2}\boldsymbol{z}_1$ とおけば、残るは一意性だけである。ここで

$$\forall \boldsymbol{x} \in \mathcal{H}, \quad f(\boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}) = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}')$$

[40]関数空間における場合から名づけられたのだろう。

となるとすると

$$\forall \boldsymbol{x} \in \mathcal{H}, \quad (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z} - \boldsymbol{z}') = 0$$

なので、$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{z} - \boldsymbol{z}'$ とすれば $\|\boldsymbol{z} - \boldsymbol{z}'\|^2 = 0$ つまり $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{z}'$ であり、条件を満たす $\boldsymbol{z}$ は一意的である。 $\boxed{\text{証明終}}$

索引

参考文献

[1] ルベーグ積分 30 講 志賀浩二著 朝倉書店

[2] はじめての確率論 測度から確率へ 佐藤坦著 共立出版

[3] ルベーグ積分入門 伊藤清三著 数学選書 4 裳華房

[4] 現代数理統計学 竹村彰通著 創文社現代経済学選書 8 創文社

[5] 資産の価格付けと測度変換 木島正明・田中敬一著 シリーズ金融工学の新潮流 朝倉書店

[6] 統計学入門 東京大学教養学部統計学教室編 基礎統計学 I 東京大学出版会

[7] 確率数理工学演習 (1) 田中冬彦助教担当
東京大学工学部計数工学科数理情報工学コース

[8] 解析数理工学 杉原正顯教授担当
東京大学工学部計数工学科数理情報工学コース

[9] 数学の基礎 集合・数・位相 齋藤正彦著 基礎数学 14 東京大学出版会

[10] 位相への 30 講 志賀浩二著 朝倉書店

[11] 解析入門 I 小平邦彦著 岩波書店

[12] 基礎数理 室田一雄教授担当
東京大学工学部計数工学科

[13] 齋藤正彦 線形代数入門 東京大学出版 1966.

[14] 固有値問題 30 講 志賀浩二著 朝倉書店.

[15] 確率微分方程式 入門から応用まで ベァーント・エクセンダール著 谷口説男訳シュプリンガー・フェアラーク東京

[16] 数学 3 2007 年度 冬学期 東京大学工学部講義 伊藤伸泰教授.